

TESIS DE DOCTORADO EN ESTADÍSTICA

TESTS DE BONDAD DE AJUSTE DE UNA PARTE DE LA
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Autor

Juan C. Rodríguez

Comisión de Supervisión

Dr. Aldo José Viollaz (Director)

Dr. Raúl Pedro Mentz

Ing. Jorge Gustavo Perera

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

Julio de 2006

Agradecimientos

A mi director el Dr. Aldo J. Viollaz por su excelente guía. A la Comisión de Supervisión por sus útiles comentarios y sugerencias. A todos los profesores de la Universidad Nacional de Tucumán que contribuyeron a mi formación profesional y de postgrado. También a la Universidad Nacional de Catamarca por su apoyo financiero para la realización de mis estudios de postgrado e investigación conjunta con mi director de Tesis. Por último a mi familia por su constante aliento.

INDICE

Capítulo 1. Introducción

- 1.1 Introducción, 1
- 1.2 Tests de normalidad, 2
- 1.3 Tests de normalidad de una parte de la distribución de probabilidad, 4
- 1.4 Algunas observaciones sobre el uso de los tests de normalidad, 7

Capítulo 2. Test de normalidad de una mitad de la distribución

- 2.1 Introducción, 9
- 2.2 El test, 10
- 2.3 Distribución asintótica nula del test, 13
- 2.4 Potencia del test, 15
- 2.5 Comentarios y Conclusiones, 17

Capítulo 3. Test de normalidad de una parte de la distribución

- 3.1 Introducción, 19
- 3.2 Preliminares, 22
- 3.3 Distribución asintótica alternativa de $d^{(e)}(F_n)$, 24
 - 3.3.1 Existencia y consistencia de un estimador de escala por distancia mínima, 29
 - 3.3.2 Distribución asintótica del estimador de escala, 30
 - 3.3.3 Estimación de la varianza de la distribución límite de $d^{(e)}(F_n)$, 43
 - 3.3.4 Intervalo de confianza para $d^{(e)}(F)$, 46
 - 3.3.5 Fórmulas de cálculo, 48

Capítulo 4. Distribución asintótica nula del test

- 4.1 Distribución asintótica nula de $nd^{(e)}(F_n)$, 53

Capítulo 5. Aplicaciones

- 5.1 Diagnóstico por partes, 62
- 5.2 El uso de variables perturbadas en estimación, 65
- 5.3 Una observación, 69

Capítulo 6. Comentarios finales

- 6.1 Comentarios finales y proyectos a futuro, 70

Apéndice, 72

Referencias, 95

RESUMEN

Existen situaciones en las que se necesita modelar sólo una parte de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, siendo la otra parte irrelevante para el problema considerado. En este trabajo se aborda el problema de contrastar normalidad de una parte de la distribución de probabilidad. Se proponen y estudian estadísticos basados en la distancia de Cramér-von Mises, con una función de peso que define la parte de interés. Se encuentran las distribuciones asintóticas bajo las hipótesis nula y alternativa. Esta última permite la construcción de intervalos de confianza para la distancia en la que se basa el estadístico propuesto, posibilitando de esta forma, asignar un grado de normalidad a una parte de interés; permitiendo así por ejemplo declaraciones como: A la derecha de su mediana la distribución muestreada tiene un grado de normalidad superior al de una distribución *t* de Student con 20 grados de libertad. Para el caso particular en que la parte considerada es la mitad de la distribución, el estadístico propuesto puede usarse con muestras truncadas, esto es, los datos a la izquierda (derecha) de la mediana muestral, son suficientes para realizar inferencia sobre la mitad izquierda (derecha) de la distribución.

El hecho de poder contrastar normalidad sobre distintas partes de la distribución muestreada, permite realizar una inferencia más objetiva y precisa. Por ejemplo determinar que el grado de normalidad de una mitad es muy superior al de la otra o que una de las mitades es normal y la otra decididamente no lo es. Si éste fuera realmente el

caso, cualquiera de los clásicos tests de normalidad seguramente rechazaría el modelo normal debido a la discrepancia presente en la mitad no normal.

Por último parece oportuno destacar la importancia que puede tener el uso de la herramienta propuesta en experimentación Monte Carlo, por ejemplo para explorar empíricamente si un estadístico tiene distribución asintótica normal o para comparar la velocidad de convergencia a la distribución normal de dos estimadores de un mismo parámetro.

CAPITULO 1

1.1 Introducción

Existen situaciones en las que se necesita modelar sólo una parte de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, siendo la otra parte irrelevante para el problema considerado. Por ejemplo al modelar la velocidad del viento a fin de evaluar su acción sobre estructuras, lo que cuenta es la parte superior de la distribución, mientras que si estuviéramos interesados en evaluar la energía del viento con el fin de generar electricidad, la parte inferior de la distribución sería la más importante. Estas situaciones requieren emplear medidas de discrepancia entre el modelo y las observaciones, que asignen mayor peso a la parte de interés. Viollaz y Rodríguez propusieron y estudiaron tests de bondad de ajuste de tipo Cramér-von Mises para tratar este problema, que dieron como resultado las publicaciones: Rodríguez y Viollaz (1995, 1999) y Viollaz y Rodríguez (1996).

La idea básica de estos tests fue el uso de funciones de peso asimétricas que permiten asignar mayor peso a las discrepancias correspondientes a los puntos pertenecientes a la región de interés. Dos de los tests estudiados involucran la estimación de parámetros y esta estimación se hizo en base al método de máxima verosimilitud dando a todos los datos el mismo peso. Esto no resulta del todo coherente pues se debería dar

también mayor peso a los datos provenientes de la parte relevante en el proceso de estimación de los parámetros y no sólo al definir la medida de discrepancia entre los datos y el modelo. Esto condujo a la necesidad de reformular la hipótesis nula y al planteo de un nuevo problema: contrastar la bondad de ajuste de una mitad de una distribución. Los primeros resultados de esta nueva línea de investigación fueron presentados en el Congreso Latinoamericano de Sociedades de Estadística, Mendoza, julio de 1999. Sobre esta temática cabe mencionar los trabajos de Pettit y Stephens, Pettitt (1976), Pettit and Stephens (1976) quienes en la década del 70 propusieron y estudiaron tests de bondad de ajuste para muestras truncadas, procedimientos que también pueden ser utilizados para contrastar la bondad de ajuste de una parte de la distribución a pesar de que no hayan sido originalmente concebidos para tal fin.

En el presente trabajo se proponen y estudian tests de bondad de ajuste para contrastar normalidad de una parte (no sólo de una mitad) de la distribución de probabilidad.

1.2 Tests de normalidad

Si Φ denota la función de distribución definida sobre la recta real por

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

llamamos familia normal a la familia de funciones de distribución F de la forma

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

donde μ y σ denotan números reales, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Por definición Φ es un miembro de la familia normal. Llamamos a Φ función de distribución normal estándar y a su derivada Φ' densidad normal estándar y la denotamos por ϕ .

Sea x_1, \dots, x_n una muestra de una variable aleatoria X con función de distribución desconocida F . Supongamos se quiere contrastar la hipótesis

$$(1) \quad H_0: F \text{ es algún miembro de la familia normal.}$$

Cualquier test de (1) es un test de normalidad. Existen en la literatura diversos tests de normalidad, varios de ellos basados en un funcional d que asigna a cada función de distribución F de cierta familia que contiene a la familia normal, un número real no negativo, de tal suerte que $d(F) = 0$ si y solamente si F es algún miembro de la familia normal. Llamamos a $d(F)$ distancia de F a la familia normal aun cuando d no defina una distancia en el sentido matemático. Entonces, dada d , si F_n denota la función de distribución empírica de una muestra x_1, \dots, x_n de X con función de distribución F , $d(F_n)$ es un test de normalidad y la hipótesis (1) se puede escribir como

$$(2) \quad H_0 : d(F) = 0$$

Observación: La palabra test se usa en este trabajo indistintamente para significar procedimiento de prueba de una hipótesis estadística, basado en cierto estadístico o bien estadístico en el cual se basa dicho procedimiento de prueba, dependiendo del contexto el significado atribuible.

Ejemplo 1

Sea F una función de distribución con media μ_F y desviación estándar σ_F , entonces si se define $d(F)$ como

Por definición Φ es un miembro de la familia normal. Llamamos a Φ función de distribución normal estándar y a su derivada Φ' densidad normal estándar y la denotamos por ϕ .

Sea x_1, \dots, x_n una muestra de una variable aleatoria X con función de distribución desconocida F . Supongamos se quiere contrastar la hipótesis

$$(1) \quad H_0: F \text{ es algún miembro de la familia normal.}$$

Cualquier test de (1) es un test de normalidad. Existen en la literatura diversos tests de normalidad, varios de ellos basados en un funcional d que asigna a cada función de distribución F de cierta familia que contiene a la familia normal, un número real no negativo, de tal suerte que $d(F) = 0$ si y solamente si F es algún miembro de la familia normal. Llamamos a $d(F)$ distancia de F a la familia normal aun cuando d no defina una distancia en el sentido matemático. Entonces, dada d , si F_n denota la función de distribución empírica de una muestra x_1, \dots, x_n de X con función de distribución F , $d(F_n)$ es un test de normalidad y la hipótesis (1) se puede escribir como

$$(2) \quad H_0 : d(F) = 0$$

Observación: La palabra test se usa en este trabajo indistintamente para significar procedimiento de prueba de una hipótesis estadística, basado en cierto estadístico o bien estadístico en el cual se basa dicho procedimiento de prueba, dependiendo del contexto el significado atribuible.

Ejemplo 1

Sea F una función de distribución con media μ_F y desviación estándar σ_F , entonces si se define $d(F)$ como

$$d(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - \Phi(\frac{x - \mu_F}{\sigma_F})]^2 d\Phi(\frac{x - \mu_F}{\sigma_F}) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]^2 d\Phi(t),$$

d es una distancia definida sobre el conjunto de distribuciones F con media y desviación estándar finitas. Si F_n denota la distribución empírica de una muestra de F , $nd(F_n)$ es el clásico test W_n^2 de Cramér-von Mises.

Ejemplo 2

Sea F una función de distribución con media μ_F y desviación estándar σ_F , entonces si se define $d(F)$ como

$$(3) \quad d(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]^2 \frac{d\Phi(t)}{\Phi(t)(1 - \Phi(t))},$$

d es una distancia definida sobre el conjunto de distribuciones F con media y desviación estándar finitas y tales que la integral del segundo miembro de (3), existe.

Si F_n denota la distribución empírica de una muestra de F , $nd(F_n)$ es el clásico test A_n^2 de Anderson-Darling.

1.3 Tests de normalidad de una parte de la distribución de probabilidad

En este trabajo se propone un test para contrastar normalidad de una parte de la distribución. Dicha propuesta consiste en la versión muestral de una distancia de tipo Cramér-von Mises con una función de peso definitoria de la parte de la distribución que se desea modelar. Una descripción detallada de la distancia usada en la definición del test se da en la Sección 3.1.

Ejemplo 3

Para contrastar la hipótesis nula:

H_0 : F es normal a la izquierda de su mediana,

proponemos el test

$$(3) \quad d(F_n) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) d\Phi(t),$$

donde w denota una función de peso que es esencialmente la función indicadora $I_{(-\infty, 0)}$, F_n es la función de distribución empírica de los datos y θ_n es la mediana muestral.

Así, (3) es la versión muestral de la distancia

$$\begin{aligned} d(F) &= \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) d\Phi(t) \approx \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^0 [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 d\Phi(t) \\ &= \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\theta_F} [F(x) - \Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma})]^2 d\Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma}) \end{aligned}$$

donde θ_F denota mediana de F.

Entonces $d(F)$ "elige" aquel miembro de la familia normal que tiene la misma mediana que F y para el cual la discrepancia

$$\int_{-\infty}^{\theta_F} [F(x) - \Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma})]^2 d\Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma}),$$

sobre el intervalo de interés $(-\infty, \theta_F)$, es mínima.

Análogamente,

$$d^*(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{\theta_F}^{\infty} [F(x) - \Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma})]^2 d\Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma}),$$

“elige” aquel miembro de la familia normal que tiene la misma mediana que F y para el cual la discrepancia

$$\int_{\theta_F}^{\infty} [F(x) - \Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma})]^2 d\Phi(\frac{x - \theta_F}{\sigma}),$$

sobre el intervalo de interés (θ_F, ∞) , es mínima.

Para una función de distribución F como la definida por

$$F(x) = \Phi(x) \text{ si } x \leq 0, F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-x\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \text{ si } x > 0,$$

que es normal a la izquierda de su mediana y exponencial a la derecha de la misma, $nd(F_n)$ tiene potencia igual al nivel de significación elegido α . O sea, el test ignora las discrepancias con el modelo normal, que ocurren fuera de la región de interés, en este caso la mitad izquierda.

Por otro lado, haciendo uso de la teoría desarrollada en el Capítulo 3, es posible construir sendos intervalos de confianza para $d(F)$ y $d^*(F)$, de manera de asignar un grado de normalidad a cada una de las partes izquierda y derecha de la función de distribución F.

Mediante simulación Monte Carlo encontramos los siguientes intervalos de confianza de nivel 0.99, basados en 10000 observaciones:

$$0 \leq d(F) \leq 0.024E - 04 \text{ y}$$

$$1.1E - 4 \leq d^*(F) \leq 2.24E - 04$$

Estos intervalos pueden interpretarse comparándolos por ejemplo con las distancias $d(T_{gl})$, donde T_{gl} denota distribución t con gl grados de libertad, para distintos grados de libertad.

1.4 Algunas observaciones sobre el uso de los tests de normalidad

Sea x_1, \dots, x_n una muestra de una variable aleatoria X con función de distribución desconocida F . Supongamos se quiere contrastar la hipótesis

$$H_0: F \text{ es algún miembro de la familia normal.}$$

Sea $T_n = d(F_n)$ un test de normalidad basado en alguna distancia d y sea G_n la función de distribución de T_n , que suponemos es la misma (al menos asintóticamente) para cada uno de los miembros de la familia normal. Las dos situaciones indeseables siguientes se presentan con bastante frecuencia:

- (i) El test declara normales a funciones de distribución F que distan mucho de serlo, cuando el tamaño de muestra es pequeño y
- (ii) El test declara no normales a funciones de distribución F próximas a la familia normal cuando el tamaño de muestra es suficientemente grande.

Por ejemplo, mediante simulación Monte Carlo se encuentra que el clásico test de Cramér-von Mises, con un tamaño de muestra $n=50$ declara normal a una distribución uniforme el 53 % de las veces; y con un tamaño de muestra $n=500$ declara no normal a una distribución $\chi^2(40)$ el 83 % de las veces.

Estos inconvenientes no se pueden salvar si no se tiene al menos la distribución asintótica del test bajo cada uno de los miembros de la familia de distribuciones alternativas. El conocimiento de esta distribución permite usos más objetivos del test,

como ser medir la distancia $d(F)$ de F a la familia normal mediante un intervalo de confianza, asignándole a F de esta manera, un "grado de normalidad según d ".

Este trabajo se estructura como sigue:

El Capítulo 2 trata de un test de normalidad de una mitad de la distribución. En el Capítulo 3 se encuentra la distribución asintótica del test de normalidad propuesto en este trabajo, bajo distribuciones alternativas. En el Capítulo 4 se encuentra la distribución asintótica nula. En el Capítulo 5, se dan algunas aplicaciones. El Capítulo 6 es para comentarios y conclusiones.

CAPITULO 2

Test de normalidad de una mitad de la distribución

2.1 Introducción

Hay situaciones en las que el interés es modelar solamente una parte de la distribución de probabilidades de una variable aleatoria. En este Capitulo se propone un test para contrastar la hipótesis:

(1) H_0 : F es normal a la derecha (izquierda) de la mediana,

esto es, existen constantes reales μ y σ , $\sigma > 0$ tales que $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, para todo $x \geq \mu$,

donde Φ denota función de distribución normal estándar.

Pettitt (1976) estudió un test para contrastar normalidad con muestras truncadas que es más general que el aquí propuesto ya que se puede usar para contrastar normalidad de la distribución de probabilidad en un intervalo arbitrario de la recta real en lugar de la mitad. La diferencia con la presente propuesta está en los estimadores de los parámetros de posición y escala del modelo. A pesar de esta aparente no sustancial diferencia la presente propuesta tiene en general más potencia que la de Pettitt.

Este Capítulo se estructura como sigue: En la Sección 2.2 se define el test. En la Sección 2.3 se demuestra la existencia de la distribución asintótica nula del test. En la Sección 2.4 se dan sendas tablas de potencias frente a las mismas alternativas, del test propuesto y del test de Pettitt, a fin de realizar comparaciones.

2.2 El test

En esta Sección definimos la hipótesis nula y proponemos el estadístico para contrastar la misma.

Definición 1

Sea \mathfrak{T}_0 la familia de funciones de distribución $F(\cdot, \mu, \sigma)$, μ y $\sigma > 0$, números reales tales que $F(x, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ para todo $x \geq \mu$, existe $\partial F(x, \mu, \sigma) / \partial x$ y es continua en algún entorno de $x = \mu$ y para $0 < t < 1$, las funciones g_1 y g_2 definidas respectivamente por

$$g_1(t) = \partial F(x, \mu, \sigma) / \partial \mu,$$

$$g_2(t) = \partial F(x, \mu, \sigma) / \partial \sigma,$$

$t = F(x, \mu, \sigma)$, son continuas. Llamamos a \mathfrak{T}_0 la familia nula.

Definición 2

Sea F una función de distribución arbitraria con mediana $M = F^{-1}(1/2)$ tal que

$$\int_M^{\infty} (x - M)^2 dF(x) < \infty.$$

Definimos "varianza derecha de F" por

$$\sigma_r^2 = 2 \int_M^{\infty} (x - M)^2 dF(x).$$

Definición 3

Sea F una función de distribución arbitraria con mediana M. Definimos la distancia de F a la familia nula \mathfrak{F}_0 , por

$$d(F) = \int_M^{\infty} [F(x) - \Phi(\frac{x-M}{\sigma_r})]^2 d\Phi(\frac{x-M}{\sigma_r})$$

Definición 4

Sean x_1, \dots, x_n observaciones independientes de una variable aleatoria X con función de distribución F y sea F_n la correspondiente función de distribución empírica. Para contrastar la hipótesis $F \in \mathfrak{F}_0$, proponemos el siguiente estadístico de bondad de ajuste:

$$(2) \quad K_2^2 = nd(F_n) = n \int_m^{\infty} [F_n(x) - \Phi(\frac{x-m}{s_r})]^2 d\Phi(\frac{x-m}{s_r}),$$

donde m denota mediana muestral y s_r denota "desviación estándar muestral derecha" definida por la raíz cuadrada de:

$$(3) \quad s_r^2 = 2 \int_m^{\infty} (x - m)^2 dF_n(x) = (2/n) \sum_{x_i \geq m} (x_i - m)^2$$

Similarmente, para contrastar que la mitad izquierda de la función de distribución es normal, podemos usar el siguiente estadístico:

$$K_1^2 = n \int_{-\infty}^m [F_n(x) - \Phi(\frac{x-m}{s_l})]^2 d\Phi(\frac{x-m}{s_l}),$$

donde ahora s_l denota "desviación estándar muestral izquierda", definida por la raíz cuadrada de

$$s_l^2 = 2 \int_{-\infty}^m (x - m)^2 dF_n(x) = (2/n) \sum_{x_i \leq m} (x_i - m)^2$$

Haciendo $t = \Phi(\frac{x-m}{s_r})$, se tiene

$$K_2^2 = n \int_{1/2}^1 [\hat{F}_n(t) - t]^2 dt,$$

donde \hat{F}_n denota la función de distribución empírica de los datos transformados

$$t_i = \Phi(\frac{x_i - m}{s_r}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Siguiendo a Durbin (1973a), es simple probar que

$$K_2^2 = \frac{n}{24} + \sum_{j \geq (n+1)/2}^n (t_{(j)}^2 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{n} \sum_{j \geq (n+1)/2}^n (2j-1)(t_{(j)} - \frac{1}{2})$$

2.3 Distribución asintótica nula del test

Sea $F \in \mathfrak{F}_0$ y sea $\theta = (\mu, \sigma^2)$ el vector de parámetros asociados a F . De la definición de \mathfrak{F}_0 (Definición 1) sigue inmediatamente que $M = \mu$ and $\sigma_r^2 = \sigma^2$.

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de distribución F . En esta Sección mostramos que el estadístico K_2^2 (definido en (2)) converge débilmente a una función distribución límite que es independiente de $F \in \mathfrak{F}_0$, esto es, la distribución asintótica nula existe y es la misma para cada miembro de la familia nula \mathfrak{F}_0 .

Usando la notación de Durbin (1973b), escribimos

$$(4) \quad K_2^2 = \int_0^1 \hat{y}_n^2(t) \psi(t) dt,$$

donde $\psi(t) = 0$ si $0 \leq t < 1/2$, $\psi(t) = 1$ si $1/2 \leq t \leq 1$ y

$$\hat{y}_n(t) = \sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - t),$$

es el llamado proceso empírico estimado. Durbin (1973b) encuentra la distribución límite de \hat{y}_n cuando el modelo y los parámetros satisfacen las condiciones A_2 y A_1 (ver pág. 281). Es fácil mostrar que las condiciones A_2 se satisfacen para cada uno de los miembros de la familia nula \mathfrak{F}_0 . Respecto de los estimadores de los parámetros, la teoría de Durbin requiere asociar a cada uno de ellos una función l , que satisface

$$(5) \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n l_i(x_j, \theta) + \varepsilon_{in},$$

donde ε_{in} converge a cero en probabilidad. En nuestro caso la función l asociada a la mediana muestral es su función de influencia dada por

$$I_1(x) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} [2I_{(0,\infty)}(x-\mu) - 1],$$

mientras que la función I asociada a s_r^2 (definido en (3)), viene dada por

$$I_2(x) = (2(x-\mu)^2 - 4\sigma^2)I_{(0,\infty)}(x-\mu) + \sigma^2,$$

Ésta se encuentra aplicando la teoría de von Mises sobre los funcionales estadísticos (Serfling R.J (1980), Capítulo 6). Mediante simulación Monte Carlo se verifica que I_2 satisface (5).

Teorema 1

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias i.i.d. con función de distribución $F \in \mathfrak{T}_0$.

Entonces el proceso $\hat{y}_{H\Psi}$, el integrando en (4), converge débilmente al proceso gaussiano $y\Psi$ con media cero y función de covarianzas

$$\rho(s, t) = \{\min(s, t) - st - h'(s)g(t) - h'(t)g(s) + g'(s)Lg(t)\}\sqrt{\psi(s)}\sqrt{\psi(t)},$$

donde,

$$L = \begin{bmatrix} \pi\sigma^2/2 & -\sigma^3\sqrt{\pi/2} \\ -\sigma^3\sqrt{\pi/2} & 5\sigma^4 \end{bmatrix},$$

y g, h son funciones vectoriales con componentes $g_i, h_i, i = 1, 2$, que satisfacen

$$g_1(t) = -\frac{1}{\sigma}\phi(\Phi^{-1}(t)), \text{ si } t \geq 1/2$$

$$g_2(t) = -\frac{1}{2\sigma^2}\Phi^{-1}(t)\phi(\Phi^{-1}(t)), \text{ si } t \geq 1/2$$

$$h_1(t) = \sigma\sqrt{(\pi/2)}(t-1), \text{ si } t \geq 1/2$$

$$h_2(t) = \sigma^2[1-t-2\Phi^{-1}(t)\phi(\Phi^{-1}(t))], \text{ si } t \geq 1/2.$$

Además como K_2^2 es continua en la métrica de Skorokhod se sigue que K_2^2 converge en distribución a la variable

$$\int_0^1 y(t)\psi(t)dt = \int_{1/2}^1 y(t)dt .$$

La Tabla 2.1 contiene algunos percentiles superiores de la distribución asintótica nula de K_2^2 , estimados mediante 40000 réplicas Monte Carlo, para los tamaños de muestra $n=51, 101$ y 201 . En ella se observa que los valores correspondientes al tamaño muestral $n=201$, pueden tomarse como los percentiles de la función de distribución asintótica.

Tabla 2.1

Percentiles superiores de la distribución asintótica nula de K_2^2 ,
estimados mediante 40000 réplicas Monte Carlo

n	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
51	0.020	0.032	0.050	0.065	0.101
101	0.020	0.032	0.051	0.067	0.104
201	0.020	0.033	0.051	0.065	0.104

2.4 Potencia del test

La Tabla 2.2 contiene para un conjunto de alternativas la distancia a la familia nula \mathfrak{F}_0 y la potencia estimada. Por otro lado la Tabla 2.3 da las potencias del test de Pettitt calculado usando los estimadores de Gupta para los parámetros, para las mismas alternativas y los mismos tamaños muestrales $n=51, 101$ and 201 . De la comparación de

las Tablas 2.2 y 2.3 surge que el test propuesto tiene en general (para las alternativas consideradas) más potencia que el test de Pettitt.

Tabla 2.2

Potencias de K_2^2

Alternativa	D(F)x10 ⁴	Probab.de rechazar H0		
		n=51	n=101	n=201
Normal	0	0.052	0.050	0.050
Exponencial-normal continua *	0	0.053	0.054	0.050
Exponencial-normal discontinua **	0	0.052	0.047	0.052
Normal asimétrica ($\sigma=1, \sigma=3$) ***	0	0.087	0.082	0.087
Weibull 4	0.0604	0.049	0.053	0.070
Weibull 2	0.3827	0.075	0.099	0.122
Logística	1.2033	0.128	0.179	0.276
Gumbel	4.0038	0.234	0.400	0.623
$\chi^2(4)$	4.4979	0.267	0.427	0.684
Uniforme (0,1)	7.6226	0.295	0.650	0.951
Laplace	9.0682	0.389	0.649	0.898
Log normal ($\mu=0, \sigma=1$)	45.863	0.793	0.969	1.000

* $F(x) = (1/2)\exp(\sqrt{2/\pi}x)$ si $x < 0$, $F(x) = \Phi(x)$ si $x \geq 0$

** $F(x) = (1/2)\exp(x)$ si $x < 0$, $F(x) = \Phi(x)$ si $x \geq 0$

*** $F(x) = \Phi(x)$ si $x < 0$, $F(x) = \Phi(x/3)$ si $x \geq 0$

TABLA 2.3

Potencias del test de Pettitt

Alternativa	Probab.de rechazar H0		
	n=51	n=101	n=201
Normal	0.062	0.051	0.052
Exponencial-normal continua *	0.058	0.050	0.051
Exponencial-normal discontinua **	0.046	0.047	0.047
Normal asimétrica ($\sigma=1, \sigma=3$) ***	0.044	0.038	0.038
Weibull 4	0.074	0.077	0.102
Weibull 2	0.034	0.036	0.045
Logística	0.043	0.070	0.169
Gumbel	0.051	0.132	0.363
$\chi^2(4)$	0.055	0.129	0.368
Uniforme (0,1)	0.636	0.917	0.998
Laplace	0.097	0.273	0.623
Log normal ($\mu=0, \sigma=1$)	0.382	0.775	0.987

2.5 Comentarios y conclusiones

En este Capítulo se presenta la idea de contrastar normalidad de una mitad de la distribución de probabilidad. El test propuesto se compara favorablemente con el test de

Pettitt aun cuando este último fue pensado como test para muestras truncadas. En el Capítulo 3 la idea de contrastar normalidad de una mitad se extiende y se propone un test para contrastar normalidad de una parte determinada de la distribución de probabilidad.

CAPITULO 3

Test de normalidad de una parte de la distribución

3.1 Introducción

Dada una muestra de observaciones independientes de una variable aleatoria X con distribución desconocida F , un test para contrastar la hipótesis

$$(1) \quad H_0 : F \in \mathfrak{N},$$

donde \mathfrak{N} denota la familia de distribuciones normales, se denomina test de normalidad.

Más precisamente escribimos \mathfrak{N} como:

$$\mathfrak{N} = \{F : \text{existen nros. reales } \mu, \sigma, \sigma > 0 \text{ tales que } F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \text{ para todo } x \text{ real}\}$$

En este capítulo consideramos una hipótesis nula H_0^* más general que H_0 .

Dados p_1 y p_2 , números reales $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$, sea

$$(2) \quad H_0^* : F \in \mathfrak{N}^{(p_1, p_2)},$$

donde $\mathfrak{N}^{(p_1, p_2)}$ denota la familia de distribuciones F , F normal en el intervalo $(F^{-1}(p_1), F^{-1}(p_2))$. Más precisamente,

$$\mathfrak{S}^{(p_1, p_2)} =$$

$\{F : \text{existen nros reales } \mu, \sigma, \sigma > 0 \text{ tales que } F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ para todo } x \in (F^{-1}(p_1), F^{-1}(p_2))\}$

En particular si se toma $p_1 = 0, p_2 = 1$, las hipótesis H_0 y H_0^* son idénticas, de manera que H_0 es un caso particular de H_0^* .

Sean p_1, p_2 números reales, $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$, sea F una distribución arbitraria y F^{-1} su inversa, $F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}$, $0 < p < 1$. Introduciendo la notación más breve $k_1 = F^{-1}(p_1), k_2 = F^{-1}(p_2)$, definimos distancia de F a la familia $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2)}$, de la siguiente manera:

$$(i) \quad \text{Si } [p_1, p_2] = [0, 1], \quad d^{(0)}(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{k_1}^{k_2} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt,$$

donde θ_F denota la media $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$, o la mediana $F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, de F .

$$(ii) \quad \text{Si } \frac{1}{2} \in [p_1, p_2], \quad p_2 - p_1 < 1,$$

$$d^{(0)}(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{k_1}^{k_2} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt, \quad \text{donde } \theta_F = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$(iii) \quad \text{Si } p_2 < \frac{1}{2}, \quad d^{(0)}(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{k_1}^{k_2} [F(\theta_F + \sigma(t - \Phi^{-1}(p_2))) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt,$$

donde $\theta_F = F^{-1}(p_2)$

$$(iv) \quad \text{Si } p_1 > \frac{1}{2}, \quad d^{(0)}(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{k_1}^{k_2} [F(\theta_F + \sigma(t - \Phi^{-1}(p_1))) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt,$$

donde $\theta_F = F^{-1}(p_1)$.

Así $d^{(0)}$ es un funcional definido sobre el conjunto de todas las funciones de distribución (para las cuales θ_F existe) y se tiene que $F \in \mathfrak{S}^{(p_1, p_2)}$ si y solamente si $d^{(0)}(F) = 0$.

Si F_n denota la función de distribución empírica de una muestra x_1, \dots, x_n de una variable aleatoria X con función de distribución F ,

$$d^{(0)}(F_n) = \inf_{\sigma > 0} \int_{k_1}^{k_2} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt$$

$$= \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_{F_n} + \sigma t) - \Phi(t)]^2 I_{(k_1, k_2)}(t) \phi(t) dt$$

es el llamado estimador plug-in de $d^{(0)}(F)$, donde

$$I_{(k_1, k_2)}(t) = 1 \text{ si } k_1 < t < k_2 \text{ y } I_{(k_1, k_2)}(t) = 0, \text{ de otra manera.}$$

Determinar la distribución asintótica de $d^{(0)}(F_n)$, presenta dificultades teóricas importantes, debidas a la función indicadora en la definición de la distancia. Para abordar este problema hemos modificado la distancia $d^{(0)}$ reemplazando la indicadora por una versión suavizada w la cual depende de un nuevo parámetro $\varepsilon > 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ encontramos la distribución límite del estadístico plug-in $d^{(\varepsilon)}(F_n)$ de la distancia modificada

$$d^{(\varepsilon)}(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt$$

Si bien es cierto que la distribución límite de $d^{(0)}(F_n)$ no se calcula, puesto que $\varepsilon > 0$ se puede elegir tan pequeño como se quiera, proponemos extender a $d^{(0)}(F_n)$ los resultados teóricos válidos para $d^{(\varepsilon)}(F_n)$, haciendo tender ε a cero, esto es reemplazando en cada resultado teórico, w por $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w = I_{(k_1, k_2)}$. La validación de esta propuesta se realiza mediante experimentación Monte Carlo.

3.2 Preliminares

Sea F una función de distribución y $k_1 < k_2$ números reales cualesquiera o bien $k_1 = -\infty$ ó $k_2 = +\infty$ ó $k_1 = -\infty, k_2 = +\infty$, simultáneamente. Definimos la función $d_F^{(k_1, k_2)}$, sobre el semiplano $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$, mediante

$$\begin{aligned} d_F^{(k_1, k_2)}(\mu, \sigma) &= \int_{k_1}^{k_2} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 \phi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 \phi(t) I_{[k_1, k_2]}(t) dt \end{aligned}$$

Si F tiene puntos de discontinuidad, la función $d_F^{(k_1, k_2)}$, aunque siempre continua, no es derivable sobre una infinidad de puntos de su dominio. Una manera de evitar este hecho, es reemplazar $I_{[k_1, k_2]}$, por una versión suavizada w definida por:

$$\begin{aligned} w(x) = w^{(k_1, k_2, \varepsilon)}(x) &= L\left(\frac{x - k_1}{\varepsilon}\right) \text{ si } k_1 \text{ es finito, } k_2 = +\infty \\ &= L\left(\frac{x - k_1}{\varepsilon}\right) - L\left(\frac{x - k_2}{\varepsilon}\right) \text{ si } k_1, k_2 \text{ son ambos finitos} \\ &= 1 - L\left(\frac{x - k_2}{\varepsilon}\right) \text{ si } k_1 = -\infty, k_2 \text{ es finito} \end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0$ y

$$\begin{aligned} L(x) &= 0 \text{ si } x < -1 \\ &= \frac{1}{2} + 3x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 5x^3 \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ &= \frac{1}{2} + 3x^5 - \frac{15}{2}x^4 + 5x^3 \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ &= 1 \text{ si } x \geq 1 \end{aligned}$$

La función de peso w es continua juntamente con sus tres primeras derivadas, sobre todo el eje real. Esto asegura que

$$d_F^{(k_1, k_2, \varepsilon)}(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt$$

es continua y tiene derivadas parciales hasta de segundo orden, continuas sobre el semiplano $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$.

Nota: A fin de simplificar la notación, de ahora en adelante se suprimirán los superíndices.

Así, escribiremos $d_F(\mu, \sigma)$ en lugar de $d_F^{(k_1, k_2, \varepsilon)}(\mu, \sigma)$, $w(x)$ en lugar de $w^{(k_1, k_2, \varepsilon)}(x)$, etc.

Formas alternativas de escribir $d_F^{(k_1, k_2, \varepsilon)}(\mu, \sigma)$ son las siguientes (Ver A.2)

$$(3) \quad d_F(\mu, \sigma) = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) dF^2(\mu + \sigma t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) dF(\mu + \sigma t) + k$$

donde

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^t w(x) \phi(x) dx, \quad \beta(t) = \int_{-\infty}^t w(x) \Phi(x) \phi(x) dx,$$

$$k = -2\beta(\infty) + \alpha(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(x) w(x) \phi(x) dx$$

(4)

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt$$

3.3 Distribución asintótica alternativa de $d^{(\varepsilon)}(F_n)$

Sea $\varepsilon > 0$ y sean p_1, p_2 números reales $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F tal que $d^{(\varepsilon)}(F) \neq 0$ y sea F_n la función distribución empírica de una muestra aleatoria de X . Nos proponemos a continuación determinar la distribución asintótica de $d^{(\varepsilon)}(F_n)$. El cálculo de la distribución asintótica nula de $d^{(\varepsilon)}(F_n)$, se desarrolla en el Capítulo 4.

Comenzamos esta sección demostrando un resultado de utilidad en demostraciones que siguen. Por brevedad en adelante suprimimos el superíndice ε en la notación de distancia.

Lema 3.1

Si $\theta_{F_n} \xrightarrow{\text{CPI}} \theta_F$, entonces

$$(5) \quad d_{F_n}(\theta_{F_n}, \sigma) \xrightarrow{\text{CPI}} d_F(\theta_F, \sigma),$$

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta_{F_n}, \sigma) \xrightarrow{\text{CPI}} \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma) \text{ y}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_{F_n}(\theta_{F_n}, \sigma) \xrightarrow{\text{CPI}} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma),$$

uniformemente sobre cualquier intervalo de la forma $0 < a \leq \sigma < \infty$.

Demostración de (5).

Haciendo uso de la fórmula

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt$$

y escribiendo por simplicidad θ_n en lugar de θ_F , se tiene:

$$\begin{aligned} d_{F_n}(\theta_n, \sigma) - d_F(\theta_F, \sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^2(\theta_n + \sigma t) - F^2(\theta_F + \sigma t)] w(t) \phi(t) dt \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - F(\theta_F + \sigma t)] w(t) \phi(t) \Phi(t) dt \\ &= A_n(\sigma) + B_n(\sigma), \end{aligned}$$

donde

$$A_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^2(\theta_n + \sigma t) - F^2(\theta_F + \sigma t)] w(t) \phi(t) dt,$$

$$B_n(\sigma) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - F(\theta_F + \sigma t)] w(t) \phi(t) \Phi(t) dt.$$

Se quiere probar que, elegido $a > 0$, ambos $A_n(\sigma)$ y $B_n(\sigma)$, tienden a cero con probabilidad 1, uniformemente sobre $0 < a \leq \sigma < \infty$. Llamando $g(t) = w(t)\phi(t)\Phi(t)$, escribimos

$$B_n(\sigma) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - F(\theta_F + \sigma t)] g(t) dt.$$

Haciendo el cambio de variable $\theta_F + \sigma t = x$, tenemos

$$B_n(\sigma) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x + \theta_n - \theta_F) - F(x)] g\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx$$

$$= -2 \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x + \theta_n - \theta_F) g\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx + 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx.$$

Haciendo nuevo cambio de variable $x + \theta_n - \theta_F = t$ en la primera integral, se tiene

$$B_n(\sigma) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t) g\left(\frac{t - \theta_n}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t) g\left(\frac{t - \theta_F}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dt.$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función g , en el intervalo con extremos en los puntos $\frac{t - \theta_n}{\sigma}$ y $\frac{t - \theta_F}{\sigma}$, escribimos

$$B_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} -2[F_n(t) - F(t)] g\left(\frac{t - \theta_F}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dt \\ + 2 \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(t) g'\left(\frac{t - \theta_F}{\sigma} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma}\right) dt,$$

donde $\lambda = \lambda(t, n)$, $0 < \lambda < 1$.

Luego,

$$|B_n(\sigma)| \leq 2 \sup_t |F_n(t) - F(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx + 2 \frac{|\theta_n - \theta_F|}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma})| dx,$$

Como $\sup_t |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0$ con probabilidad 1 (Glivenko-Cantelli) y $|\theta_n - \theta_F| \rightarrow 0$, con probabilidad 1, para completar la prueba de que $B_n(\sigma) \rightarrow 0$ con probabilidad 1, uniformemente sobre $0 < a \leq \sigma < \infty$, es suficiente probar que:

$$(8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty \text{ y}$$

$$(9) \quad \text{Existe } B = B(a) \text{ tal que } \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma})| dx < B,$$

para todo n suficientemente grande.

Prueba de (8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\phi(x)\Phi(x)dx \leq \sup_x [w(x)\Phi(x)] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \sup_x [w(x)\Phi(x)] < \infty$$

Para demostrar (9), observamos que $|g'(x)| \leq A\phi(x)[1+|x|]$, para cierta constante $A > 0$.

Entonces, aplicando el Lema A.1.1 con $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $k = 1$, se tiene

Para todo $\sigma \geq a$ y para todo n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma})| dx &\leq \frac{A}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma}) [1 + |x - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma}|] dx \\ &\leq \frac{A}{a} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\frac{1}{4}x^2} (1 + |x|) dx \end{aligned}$$

donde C se calcula con (4) de Lema A.1.1. Llamando $B = \frac{AC}{a}$, (9) queda demostrado.

Para demostrar la convergencia de $A_n(\sigma)$, se procede paso a paso como en la demostración anterior, tomando $g(t) = w(t)\phi(t)$ y teniendo en cuenta la identidad

$$F_n^2(t) - F^2(t) = [F_n(t) + F(t)][F_n(t) - F(t)]$$

Demostración de (6) y (7).

Es importante destacar que la convergencia $d_{F_n}(\theta_{F_n}, \sigma) \rightarrow d_F(\theta_F, \sigma)$ se demostró

sin realizar restricciones sobre F . Así, escrita d_F en la forma (Ver A.2. (3))

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) g(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) h(t) dt + K,$$

la validez del resultado se debe a

- (i) la consistencia fuerte del estimador de posición
- (ii) la existencia de las derivadas g' y h' sobre todo el eje real
- (iii) y la existencia de sendas funciones mayorantes para g' y h' ; funciones con ordenadas de la forma $A\phi(x)[1+|x|+\dots+|x|^k]$, donde $A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

Luego, la validez de (6) y de (7) sigue inmediatamente puesto que (Ver A.4, (4))

$$d'_F(\mu, \sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\mu, \sigma) = -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) [tw(t)\phi(t)]' dt + \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) [tw(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt$$

y

$$d''_F(\mu, \sigma) = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) \{2[tw(t)\phi(t)]' + t[tw(t)\phi(t)]''\} dt$$

$$- \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) \{2[tw(t)\phi(t)\Phi(t)]' + t[tw(t)\phi(t)\Phi(t)]''\} dt$$

Entonces, para demostrar (6) llamamos

$$g(x) = [tw(x)\phi(x)]' \text{ y}$$

$$h(x) = [tw(x)\phi(x)\Phi(x)]'$$

y comprobamos que, para cierta constante $K_1 > 0$ y para todo t real,

$$|g'(x)| \leq K_1 \phi(x) [1 + |x| + |x|^2 + |x|^3] \text{ y}$$

$$|h'(x)| \leq K_1 \phi(x) [1 + |x| + |x|^2 + |x|^3].$$

En cambio, para demostrar (7), llamamos

$$g(x) = 2[xw(x)\phi(x)]' + x[xw(x)\phi(x)]'' \text{ y}$$

$$h(x) = 2[xw(x)\phi(x)\Phi(x)]' + x[xw(x)\phi(x)\Phi(x)]''$$

y comprobamos que, para cierta constante $K_2 > 0$ y para todo t real,

$$|g'(x)| \leq K_1 \phi(x) [1 + |x| + |x|^2 + |x|^3] + |x|^4 + |x|^5 \text{ y}$$

$$|h'(x)| \leq K_2 \phi(x) [1 + |x| + |x|^2 + |x|^3] + |x|^4 + |x|^5.$$

3.3.1 Existencia y consistencia de un estimador de escala por distancia mínima.

Teorema 3.1

Si

(i) $\inf_{\sigma > 0} d_F(\theta_F, \sigma)$ es alcanzado en algún punto $\sigma_F > 0$ y

(ii) $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) > 0$ y

(iii) $\theta_{F_n} \xrightarrow{CPI} \theta_F,$

entonces existe $\sigma_{F_n} > 0$, minimizador local de $d_{F_n}(\theta_{F_n}, \sigma)$ tal que $\sigma_{F_n} \xrightarrow{CPI} \sigma_F.$

Demostración:

Para todo $\sigma > 0$, definamos las funciones d_F, d'_F y d''_F , mediante:

$$d_F(\sigma) = d_F(\theta_F, \sigma)$$

$$d'_F(\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma)$$

$$d''_F(\sigma) = \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma)$$

Por ser σ_F un infimador de d_F , $d'_F(\sigma_F) = 0$ y como d''_F es continua, por el teorema de la permanencia del signo, se tiene que $d''_F(\sigma) > 0$ para todo punto σ de un cierto entorno $N = [\sigma_F - \delta, \sigma_F + \delta]$ de σ_F y en consecuencia que d'_F es una función estrictamente creciente en N y tal que $d'_F(\sigma_F - \delta) < 0$, $d'_F(\sigma_F + \delta) > 0$.

Entonces, elegido $\delta^* > 0$, $\delta^* < \delta$, si x_1, x_2, \dots es una sucesión de observaciones independientes de $X \sim F$, para la cual $\theta_{F_n} \rightarrow \theta_F$, en virtud del Lema 3.1, tenemos que existe $n_0 = n_0(\delta^*)$ tal que para todo $n \geq n_0$ existe un único punto

$$\sigma_{F_n}, \sigma_F - \delta^* < \sigma_{F_n} < \sigma_F + \delta^*, \text{ tal que } d_{F_n}(\sigma_{F_n}) = \inf_{\sigma \in [\sigma_F - \delta^*, \sigma_F + \delta^*]} d_{F_n}(\sigma).$$

Resumiendo: Puesto que $\theta_{F_n} \xrightarrow{CPI} \theta_F$, se ha demostrado la existencia y consistencia fuerte de un estimador σ_{F_n} para σ_F . Por brevedad, de ahora en adelante se denotará a este estimador con σ_n .

3.3.2 Distribución asintótica del estimador de escala

Teorema 3.2

Sean X_1, \dots, X_n, X variables aleatorias iid según F ; sea θ_F un parámetro de posición de F (tal como la media o la mediana) y sea $\theta_n = \theta_n(X_1, \dots, X_n)$ un estimador de θ_F .

Si

(i)
$$\theta_n \xrightarrow{CPI} \theta_F,$$

(ii) existe $l^* : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ tal que $E(l^*(X)) = 0$ y

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l^*(x_i) + \varepsilon_n^*, \text{ donde } \varepsilon_n^* \xrightarrow{P} 0,$$

entonces, σ_n (el estimador de escala cuya existencia y consistencia se muestran en el Teorema 3.1), tiene las siguiente propiedades:

$$\sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l^{**}(x_i) + \varepsilon_n^{**}, \text{ donde } \varepsilon_n^{**} \xrightarrow{P} 0 \text{ y}$$

$$l^{**}(x) = \frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(t) - F(t)][F(t)a'(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}) - b'(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F})] dt$$

$$- \left[\frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} [F^2(t)a''(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}) - 2F(t)b''(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F})] dt \right] l^*(x),$$

$$a(t) = tw(t)\phi(t), \quad b(t) = tw(t)\phi(t)\Phi(t).$$

Demostración: Ver Sección A.5 del Apéndice.

Corolario 3.1

De la aplicación del teorema límite central y del teorema de Slutsky, sigue que σ_n el minimizador de $d_{F_n}(\theta_n, \sigma)$, es

$$AN(\sigma_F, \frac{B(F)}{n}),$$

donde

$$B(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [l^{**}(x)]^2 dF(x)$$

Ejemplo 1

Si $w(x) = 1$ y $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$,

$$l^{**}(x) = \sigma(3\sqrt{3})\pi\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} - \phi^2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

Es fácil probar (y no incluimos los cálculos) que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$E(l^{**}(X)) = 0 \text{ y } V(l^{**}(X)) = \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{27}{\sqrt{5}} - 9\right).$$

Esto es,

$$\sigma_n \text{ es asintóticamente normal } \left(\sigma, \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{27}{\sqrt{5}} - 9\right) / n\right).$$

Por otro lado, es sabido que si S_n denota la desviación estándar muestral, entonces

$$S_n \text{ es asintóticamente normal } \left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n}\right).$$

De manera que la eficiencia relativa asintótica de σ_n respecto de S_n es de

$$\frac{\sigma^2}{2} / \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{27}{\sqrt{5}} - 9\right) \approx 0.65.$$

Ahora bien, por ser l una función acotada σ_n resulta ser un estimador robusto de σ .

En realidad σ_n estima la desviación estándar de la normal más próxima a la distribución F muestreada, según la distancia de tipo Cramér-von Mises elegida. Si F es normal, la

normal más próxima a F es ella misma y en consecuencia σ_n estima su propia desviación estándar.

Mientras que para muestras de una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, σ_n tiene una eficiencia relativa asintótica de solamente el 65% para estimar σ , es superior a S_n para estimar la escala, si se desea ignorar las observaciones anómalas. Por ejemplo, para la normal contaminada

$$(1-p)N(0,1) + pN(0,5^2), p = 0.008,$$

S_n estima su desviación estándar $\sigma = \sqrt{1-p+p5^2} \approx 1.092$; en cambio σ_n estima la desviación estándar de la normal más próxima (la cual resulta ser próxima a la $N(0,1)$), con la ventaja que $V(\sigma_n)$ es mucho menor que $V(S_n)$.

La Tabla 3.1 muestra estos resultados mediante intervalos de confianza de nivel nominal 0.99 (obtenidos mediante simulación Monte Carlo) para $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(\sigma_n)$ y $V(\sigma_n)$, calculados con tamaños de muestra $n=50$, $n=100$ y $n=200$.

Tabla 3.1

Intervalos de confianza para $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(\sigma_n)$ y $V(\sigma_n)$. N° denota el número de réplicas Monte Carlo empleadas en cada caso.

n	$E(S_n)$	$V(S_n)$	$E(\sigma_n)$	$V(\sigma_n)$	N°
50	(1.058, 1.062)	(0.043, 0.046)	(1.011, 1.014)	(0.016, 0.017)	144702
100	(1.074, 1.077)	(0.02, 0.027)	(1.010, 1.012)	(0.0079, 0.082)	116569
200	(1.080, 1.084)	(0.014, 0.016)	(1.009, 1.011)	(0.0039, 0.0041)	35054

Teorema 3.3

Sea F una función de distribución tal que $d^{(\varepsilon)}(F) \neq 0$. Entonces si θ_n y σ_n satisfacen las hipótesis:

$$(i) \theta_n \xrightarrow{CPI} \theta_F, \quad \sigma_n \xrightarrow{CPI} \sigma_F$$

(ii) existe $l^* : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ tal que $E(l^*(X)) = 0$ y

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l^*(x_i) + \varepsilon_n^*, \quad \text{donde } \varepsilon_n^* \xrightarrow{P} 0,$$

se tiene que

$$\sqrt{n}(d^{(\varepsilon)}(F_n) - d^{(\varepsilon)}(F)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(x_i) + \varepsilon_n,$$

donde

$$l(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) l^*(x) + \int_{-\infty}^{\infty} 2[l_{[x, \infty)}(t) - F(t)][F(t) - \Phi(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F})] w(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}) \phi(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}) \frac{1}{\sigma_F} dt, \quad -\infty < x < \infty$$

y

$$\varepsilon_n \xrightarrow{P} 0$$

Demostración:

Seguendo a Boos (1981), Teorema 4.2, escribimos:

$$d_{F_n}(\theta_n, \sigma_n) - d_F(\theta_F, \sigma_F) = A_n + B_n,$$

donde

$$A_n = d_{F_n}(\theta_F, \sigma_F) - d_F(\theta_F, \sigma_F),$$

$$B_n = d_{F_n}(\theta_n, \sigma_n) - d_{F_n}(\theta_F, \sigma_F).$$

Por ser d_{F_n} , $\frac{\partial}{\partial \mu} d_{F_n}$ y $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}$, funciones continuas sobre el semiplano $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$,

el teorema del valor medio da:

$$\sqrt{n}B_n = \frac{\partial}{\partial \mu} d_{F_n}(\theta'_n, \sigma'_n)(\theta_n - \theta_F) + \frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta'_n, \sigma'_n)(\sigma_n - \sigma_F),$$

donde

$$\theta'_n = \theta_F + \lambda(\theta_n - \theta_F) \text{ y } \sigma'_n = \sigma_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F), \lambda = \lambda(n), 0 < \lambda < 1.$$

Luego, sumando y restando $\frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F)$ y $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F)$, escribimos

$$\begin{aligned} \sqrt{n}B_n &= \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \mu} d_{F_n}(\theta'_n, \sigma'_n) - \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) \right] \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta'_n, \sigma'_n) - \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) \right] \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F). \end{aligned}$$

Ahora, usando las fórmulas (2) y (4) de la Sección A.4.1 del Apéndice, tenemos

$$\sqrt{n}B_n = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\theta'_n + \sigma'_n t) [w(t)\phi(t)]' dt + \frac{2}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\theta'_n + \sigma'_n t) [w(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt \right. \\
& + \frac{1}{\sigma_F} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta_F + \sigma_F t) [w(t)\phi(t)]' dt - \frac{2}{\sigma_F} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta_F + \sigma_F t) [w(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt \left. \right) \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) \\
& + \left(-\frac{1}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(\theta'_n + \sigma'_n t) [tw(t)\phi(t)]' dt + \frac{2}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\theta'_n + \sigma'_n t) [tw(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt \right. \\
& + \frac{1}{\sigma_F} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta_F + \sigma_F t) [tw(t)\phi(t)]' dt - \frac{2}{\sigma_F} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta_F + \sigma_F t) [tw(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt \left. \right) \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) \\
& \quad = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) \\
& \quad + A_{1n} \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) + \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) + A_{2n} \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F).
\end{aligned}$$

Puesto que por hipótesis θ_n y σ_n tienden con probabilidad uno a θ_F y σ_F respectivamente, de la aplicación del teorema de la convergencia dominada, sigue inmediatamente que A_{1n} y A_{2n} tienden a cero con probabilidad uno; y como $\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F)$ y $\sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F)$ tienen una distribución límite, se deduce (Slutsky) que tanto $A_{1n} \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F)$ como $A_{2n} \sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F)$ tienden a cero en probabilidad. Entonces, haciendo uso de la hipótesis (ii) y de $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) = 0$, se tiene

$$(25) \quad \sqrt{n}B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) |^*(x_i) + \epsilon_n, \text{ donde } \epsilon_n \xrightarrow{P} 0.$$

Por otro lado,

$$A_n = d_{F_n}(\theta_F, \sigma_F) - d_F(\theta_F, \sigma_F)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{ [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]^2 - [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]^2 \} w(t) \phi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)] [F_n(\theta_F + \sigma_F t) + F(\theta_F + \sigma_F t) - 2\Phi(t)] w(t) \phi(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)]^2 w(t) \phi(t) dt \\
&+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)] [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)] w(t) \phi(t) dt
\end{aligned}$$

Como

$$\sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)]^2 w(t) \phi(t) dt \xrightarrow{P} 0,$$

$$\sqrt{n} A_n = 2\sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)] [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)] w(t) \phi(t) dt + \delta_n,$$

donde $\delta_n \xrightarrow{P} 0$

De la definición de F_n ,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i),$$

sigue que

$$F_n(\theta_F + \sigma_F t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, \theta_F + \sigma_F t]}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\left[\frac{x_i - \theta_F}{\sigma_F}, \infty \right)}(t)$$

En consecuencia

(26)

$$\sqrt{n} A_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} 2 [I_{\left[\frac{x_i - \theta_F}{\sigma_F}, \infty \right)}(t) - F(\theta_F + \sigma_F t)] [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)] w(t) \phi(t) dt + \delta_n$$

De (25) y (26) se obtiene finalmente

$$l(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) l^*(x) + \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)][F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t)dt$$

que, haciendo el cambio de variable $\theta_F + \sigma_F t = y$, se puede escribir en la forma

$$l(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) l^*(x) + \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(y) - F(y)][F(y) - \Phi(\frac{y - \theta_F}{\sigma_F})]w(\frac{y - \theta_F}{\sigma_F})\phi(\frac{y - \theta_F}{\sigma_F})\frac{1}{\sigma_F} dy$$

Ejemplo 2

Si F es la distribución doble exponencial

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x \text{ si } x < 0, F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \text{ y}$$

$\theta_F = 0$, σ_F denotan respectivamente la mediana de F y el infimador de la distancia

$$d(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t)\phi(t)dt,$$

entonces

$$(27) \quad l(x) = \int_{\frac{|x|}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\phi(t)dt - A,$$

donde

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\sigma_F t)[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\phi(t)dt,$$

para el caso $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ ($w(t) \equiv 1$) y

$$(28) \quad l(x) = \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt - 2B \text{ si } x < 0, \quad l(x) = 0 \text{ si } x \geq 0,$$

donde

$$B = \int_{-\infty}^0 2F(\sigma_F t)[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt,$$

para el caso $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$ ($w(t) = I_{(-\infty, 0]}(t)$).

En efecto:

En el primer caso, según Lema A.4.2 del Apéndice,

$$\frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) = 0,$$

y en consecuencia

$$l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathbb{I}_{\left[\frac{x}{\sigma_F}, \infty\right)}(t) - F(\sigma_F t)[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt = \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt - A$$

Así, si $x < 0$,

$$(29) \quad \begin{aligned} l(x) &= \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\frac{x}{\sigma_F}} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt + \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt - A \\ &= 0 + \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\mathbb{1}(t)dt - A \end{aligned}$$

En cambio, si $x \geq 0$,

$$(30) \quad I(x) = \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^{\infty} 2[F(\sigma_F t) - \Phi(t)]\psi(t) dt - A$$

Luego, (27) sigue de (29) y (30).

En el segundo caso,

$$I(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) I^*(x) + \int_{-\infty}^{\infty} 2 \left[I_{\left[\frac{x}{\sigma_F}, \infty \right)}(t) - F(\sigma_F t) \right] [F(\sigma_F t) - \Phi(t)] w(t) \phi(t) dt$$

donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) &= \frac{1}{\sigma_F} \int_{-\infty}^0 \phi(t) dF^2(\sigma_F t) - \frac{2}{\sigma_F} \int_{-\infty}^0 \phi(t) \Phi(t) dF(\sigma_F t) \\ &= \int_{-\infty}^0 2F(\sigma_F t) [2F(\sigma_F t) - \Phi(t)] \psi(t) dt = B \end{aligned}$$

y

$$I^*(x) = \frac{1}{2F'(\theta_F)} \left[1 - 2I_{(-\infty, 0]} \left(\frac{x}{\sigma_F} \right) \right],$$

de manera que, si $x \leq 0$,

$$I(x) = -B + \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^0 2F(\sigma_F t) [2F(\sigma_F t) - \Phi(t)] \psi(t) dt - B = \int_{\frac{x}{\sigma_F}}^0 2F(\sigma_F t) [2F(\sigma_F t) - \Phi(t)] \psi(t) dt - 2B.$$

En cambio, si $x > 0$,

$$I(x) = B + 0 - B = 0.$$

El parámetro σ_F y las constantes A y B fueron calculadas numéricamente obteniéndose:

$\sigma_F = 1.09$, $A = -3.93E-03$ y $B = -2.11E-03$. Las Figuras (3.1) y (3.2) muestran las gráficas de las correspondientes funciones I .

Figura 3.1

Función I asociada al estimador de la distancia $d(F)$.

Caso $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. F distribución doble exponencial,

θ_F mediana de F , σ_F minimizador de la distancia.

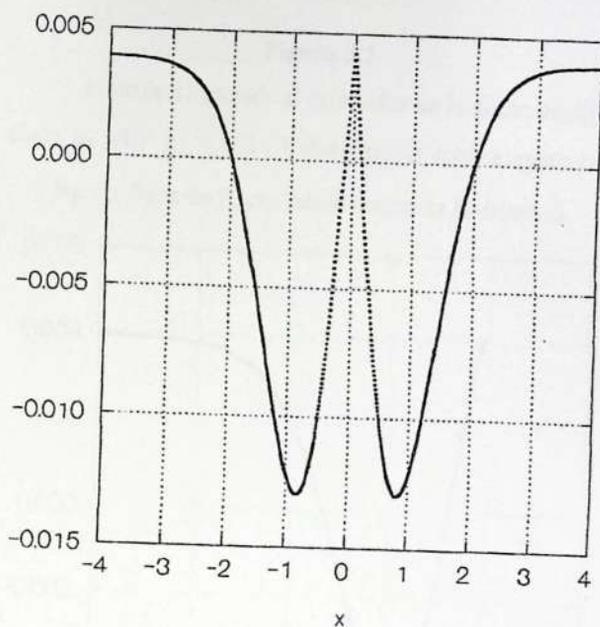
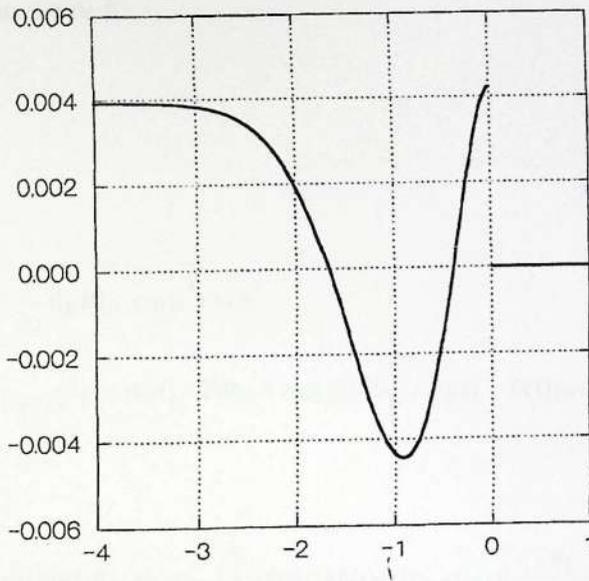


Figura 3.2

Función l asociada al estimador de la distancia $d(F)$.
Caso $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$. F distribución doble exponencial,
 θ_F mediana de F , σ_F minimizador de la distancia.



Corolario 3.2

Sea $\epsilon > 0$ y sean p_1, p_2 números reales $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$.

Si $d^{(\epsilon)}(F) \neq 0$, entonces

$$d^{(\varepsilon)}(F_n) \text{ es } AN(d^{(\varepsilon)}(F), \frac{A(F)}{n}),$$

donde

$$A(F) = \int_{-\infty}^{\infty} I^2(x) dF(x)$$

3.3.3 Estimación de la varianza de la distribución límite de $d^{(\varepsilon)}(F_n)$.

Se propone el llamado estimador plug-in.

Caso: θ_F es la media de F .

$$I^*(x) = x - \theta_F$$

$$I(x) = \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) I^*(x) + \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)][F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t) dt$$

$$I(x) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi(t) dF^2(\theta_F + \sigma_F t) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi(t)\Phi(t) dF(\theta_F + \sigma_F t) \right] \frac{x - \theta_F}{\sigma_F} + \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)][F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t) dt$$

Llamando

$$A = \sigma_F \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma_F) = - \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta_F + \sigma_F t) [w(t)\phi(t)]' dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta_F + \sigma_F t) [w(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt,$$

escribimos

$$V(l(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2I_{[x, \infty)}(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t) \right] [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)] w(t)\phi(t) dt + A \frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \int_{-\infty}^{\infty} dF(x)$$

Entonces si denotamos por G_n a la función de distribución empírica de los datos

transformados $t_i = \frac{x_i - \theta_n}{\sigma_n}$, esto es $G_n(t) = F_n(\theta_n + \sigma_n t)$, el estimador plug-in de

$V(l(X))$, viene dado por

$$\begin{aligned} (31) \quad \hat{V}(l(X)) &= \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2I_{[x, \infty)}(\theta_n + \sigma_n t) - G_n(t) \right] [G_n(t) - \Phi(t)] w(t)\phi(t) dt + \hat{A} \frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2I_{[x_i, \infty)}(\theta_n + \sigma_n t) - G_n(t) \right] [G_n(t) - \Phi(t)] w(t)\phi(t) dt + \hat{A} \frac{x_i - \theta_n}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2I_{[t_i, \infty)}(t) - G_n(t) \right] [G_n(t) - \Phi(t)] w(t)\phi(t) dt + \hat{A} t_i \int_{-\infty}^{\infty} dF_n(x), \end{aligned}$$

donde

$$\hat{A} = - \int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(t) [w(t)\phi(t)]' dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} G_n(t) [w(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt$$

Caso: θ_F es la mediana de F .

$$l^*(x) = \frac{1}{2F'(\theta_F)} [1 - 2I_{(-\infty, 0]}(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F})] = \frac{1}{2F'(\theta_F)} \operatorname{sgn}(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}), \text{ si } x \neq \theta_F$$

$V(l(X)) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(\theta_F + \sigma_F t) - F(\theta_F + \sigma_F t)][F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t)dt + \frac{A}{\sigma_F} l^*(x)^2 dF(x)$$

Para este caso, proponemos:

$\hat{V}(l(X)) =$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(\theta_n + \sigma_n t) - G_n(t)][G_n(t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t)dt + \frac{\hat{A}}{2\sigma_n \hat{F}'(\theta_n)} \operatorname{sgn}(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n})^2 dF_n(x)$$

donde \hat{F}' denota algún estimador consistente de la densidad F' .

Por ejemplo, si se toma el clásico estimador

$$\frac{F_n(y + h_n) - F_n(y - h_n)}{2h_n}, \quad h_n \rightarrow 0, \quad nh_n \rightarrow \infty,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\hat{A}}{\sigma_n} \frac{1}{2\hat{F}'(\theta_n)} &= \frac{\hat{A}}{\sigma_n} \frac{h_n}{F_n(\theta_n + h_n) - F_n(\theta_n - h_n)} \\ &= \frac{\hat{A}h_n^*}{F_n(\theta_n + \sigma_n h_n^*) - F_n(\theta_n - \sigma_n h_n^*)} = \frac{\hat{A}h_n^*}{G_n(h_n^*) - G_n(-h_n^*)} \end{aligned}$$

donde $h_n^* = \frac{h_n}{\sigma_n}$.

Así,

$$\frac{A}{\sigma_F} \frac{1}{2F'(\theta_F)}$$

se estima consistentemente por

$$\frac{\hat{A}h_n^*}{G_n(h_n^*) - G_n(-h_n^*)},$$

donde h_n^* se elige de manera que $h_n^* \rightarrow 0$ y $nh_n^* \rightarrow \infty$, obteniéndose en definitiva

$$(32) \quad \hat{V}(l(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[t_i, \infty)}(t) - G_n(t)][G_n(t) - \Phi(t)]w(t)\phi(t)dt + \frac{\hat{A}h_n^*}{G_n(h_n^*) - G_n(-h_n^*)} \text{sgn}(t_i) \right]^2$$

3.3.4 Intervalo de confianza para $d^{(\varepsilon)}(F)$

Aceptando que $\hat{V}(l(X))$ es un estimador consistente de $V(l(X))$ y usando la teoría asintótica desarrollada en este capítulo, por aplicación del teorema de Slutsky sigue inmediatamente que:

$$(d^{(\varepsilon)}(F_n) + z_{\delta/2} \sqrt{\frac{\hat{V}(l(x))}{n}}, d^{(\varepsilon)}(F_n) + z_{1-\delta/2} \sqrt{\frac{\hat{V}(l(x))}{n}}),$$

donde z_{δ} denota el percentil δ de la distribución normal estándar, es un intervalo asintótico de nivel $1 - \delta$ para $d^{(\varepsilon)}(F) \neq 0$.

Nota: Puesto que $\varepsilon > 0$ se puede elegir tan pequeño como se quiera, aceptamos sin demostración (y verificamos mediante simulación Monte Carlo) que la teoría desarrollada para el estimador $d^{(\varepsilon)}(F_n)$ de $d^{(\varepsilon)}(F) \neq 0$, es válida si se toma $w = I_{(k_1, k_2]}$. En este caso estimando y estimador se convierten respectivamente en:

$$d(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 I_{(k_1, k_2]}(t)\phi(t)dt \text{ y}$$

$$d(F_n) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - \Phi(t)]^2 I_{(k_1, k_2]}(t)\phi(t)dt.$$

A fin de que el lector tenga un conocimiento mínimo sobre el comportamiento de estos intervalos, damos en la Tabla 3.2 algunos, de nivel nominal 0.95, para distintos estimandos $d(F)$ y distintos tamaños de muestra. La Tabla 3.2 contiene además el error

relativo promedio (ERP) de los intervalos dados. Esto es, $ERP = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \frac{l_i/2}{d(F)}$, donde l_i

denota longitud del intervalo i -ésimo, $i = 1, \dots, 5$, en cada caso.

Tabla 3.2

Algunos intervalos de confianza de nivel nominal 0.95 para $d(F)$

Extremos están multiplicados por 10^4 .

F	$10^4 d(F)$	n=500	ERP	N=1000	ERP	n=4000	ERP	N=8000	ERP
Weibull 4	0.34	(0, 6.3)	5.00	(0, 3.0)	4.1	(0, 0.92)	1.21	(0.21, 1.10)	1.01
		(0, 3.7)		(0, 2.2)		(0, 0.52)		(0.03, 0.63)	
		(0, 2.3)		(0, 4.4)		(0, 1.05)		(0.07, 0.73)	
		(0, 1.4)		(0, 1.4)		(0, 0.70)		(0.06, 0.70)	
		(0, 3.3)		(0, 2.9)		(0, 0.91)		(0.05, 0.70)	
$\chi^2(40)$	3.43	(0, 8.5)	1.12	(1.3, 8.3)	0.90	(3.2, 7.0)	0.48	(3.1, 5.5)	0.32
		(0.32, 10.7)		(1.8, 9.3)		(2.8, 6.1)		(2.4, 4.4)	
		(0, 7.87)		(1.1, 7.8)		(3.4, 7.0)		(3.6, 6.2)	
		(0, 3.03)		(0, 3.36)		(1.5, 4.1)		(1.7, 3.5)	
		(0, 8.7)		(0.7, 7.0)		(2.1, 5.1)		(2.3, 4.5)	
Uniforme	6.02	(4.2, 12.3)	0.62	(4.4, 9.4)	0.42	(4.8, 7.2)	0.20	(5.2, 6.9)	0.14
		(5.0, 13.3)		(5.5, 11.2)		(4.7, 7.1)		(5.1, 6.8)	
		(2.8, 9.7)		(3.4, 7.7)		(5.2, 7.6)		(5.2, 6.9)	
		(3.6, 10.9)		(3.8, 8.7)		(4.9, 7.3)		(5.2, 6.9)	
		(3.2, 10.1)		(3.9, 9.1)		(4.7, 6.9)		(5.1, 6.8)	

A modo de referencia, la Tabla 3.3 contiene la distancia $d(F)$ para algunos miembros de la familia χ^2 , para los casos $k_1 = -\infty, k_2 = \infty$; $k_1 = -\infty, k_2 = 0$ y $k_1 = 0, k_2 = \infty$.

Tabla 3.3
Distancia $d(F)$ multiplicada por 10^4 ,
F distribución χ^2 con gl grados de libertad.

gl	Caso: $k_1 = -\infty, k_2 = 0$	Caso: $k_1 = 0, k_2 = \infty$	Caso: $k_1 = -\infty, k_2 = \infty$
2	7.3371	1.8575	47.9427
4	2.6510	0.9497	20.7907
6	1.5075	0.6511	13.0278
8	1.0313	0.4994	9.4509
10	0.7764	0.4067	7.4070
20	0.3374	0.2183	3.5514
30	0.2125	0.1507	2.3344
40	0.1543	0.1150	1.7380

Corolario 3.3

Un intervalo de confianza asintótico de nivel $1 - \delta$ para $d(F) \neq 0$, viene dado por:

$$\left(d(F_n) - z_{\delta/2} \sqrt{\frac{\hat{V}(l(x))}{n}}, d(F_n) + z_{1-\delta/2} \sqrt{\frac{\hat{V}(l(x))}{n}} \right).$$

3.3.5 Fórmulas de cálculo

Las siguientes fórmulas resultan útiles para efectuar los cálculos:

$$d(F_n) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{3}p_2^3 + p_2F_n(\theta_n + \sigma_n k_2)[F_n(\theta_n + \sigma_n k_2) - p_2] \\ - \frac{1}{3}p_1^3 - p_1F_n(\theta_n + \sigma_n k_1)[F_n(\theta_n + \sigma_n k_1) - p_1] + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [\Phi(t_j)I_{(k_1, k_2]} - \frac{j - \frac{1}{2}}{n}]^2$$

$$\hat{V}(l(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{-2i\alpha(t_i)}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^i \alpha(t_j) + 2\beta(t_i) + \hat{A}t_i \right. \\ \left. - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(t_j) + \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^n (2j-1)\alpha(t_j) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \beta(t_j) \right]^2$$

si θ_n es la media muestral.

$$\hat{V}(l(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{-2i\alpha(t_i)}{n} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^i \alpha(t_j) + 2\beta(t_i) + \frac{\hat{A}h_n^*}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{(-h_n^*, h_n^*]}(t_j)} \operatorname{sgn}(t_i) \right. \\ \left. - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(t_j) + \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^n (2j-1)\alpha(t_j) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \beta(t_j) \right]^2$$

si θ_n es la mediana muestral.

En ambos casos,

$$t_j = \frac{x_j - \theta_n}{\sigma_n}, j = 1, \dots, n,$$

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^t I_{(k_1, k_2]}(x) \phi(x) dx,$$

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^t I_{(k_1, k_2]}(x) \phi(x) \Phi(x) dx,$$

$$\hat{A} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n (2j-1) I_{(k_1, k_2]}(t_j) \phi(t_j) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n I_{(k_1, k_2]}(t_j) \phi(t_j) \Phi(t_j)$$

En el segundo caso sgn denota la función signo definida por

$$\text{sgn}(t) = -1 \text{ si } t < 0, \text{sgn}(t) = 0 \text{ si } t = 0, \text{sgn}(t) = 1 \text{ si } t > 0$$

y h_n^* (sucesión numérica) se elige de manera que $h_n^* \rightarrow 0$ y $nh_n^* \rightarrow \infty$.

Ejemplo 3

Para la distribución doble exponencial y casos $p_1 = 0, p_2 = 1$ y $p_1 = 0, p_2 = 1/2$, considerados en el ejemplo anterior, calculamos:

(i) la distancia

$$d(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t)\phi(t)dt,$$

donde θ_F denota la mediana de F ,

(ii) el valor σ_F donde se alcanza el ínfimo, esto es el valor σ_F que satisface

$$d(F) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma_F t) - \Phi(t)]^2 w(t)\phi(t)dt, \text{ y}$$

(iii) $V(l(X))$, la varianza de la distribución límite del estimador de $d(F)$,

$$d(F_n) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t)\phi(t)dt,$$

donde θ_n denota la mediana muestral $F_n^{-1}(1/2)$.

Los resultados se muestran en la Tabla 3.4. Por otro lado las Tablas 3.5 y 3.6 dan algunas estimaciones puntuales de los parámetros $\theta_F, \sigma_F, V(l(X))$ y los correspondientes intervalos de confianza de nivel nominal 0.90 para $d(F)$, calculados con estas estimaciones.

Tabla 3.4

Distribución doble exponencial

Caso	θ_F	σ_F	$d(F)$	$V(L(X))$
$p_1 = 0, p_2 = 1$	0	1.09	3.71E-04	9.35E-06
$p_1 = 0, p_2 = \frac{1}{2}$	0	1.09	1.86E-04	4.28E-06

Tabla 3.5

Distribución doble exponencial, estimaciones. Caso $p_1 = 0, p_2 = 1$

n	θ_n	σ_n	$\hat{V}(l(X))$	$d(F_n)$	Intervalo de confianza para $d(F)$, de nivel nominal 0.90
500	-0.0960	1.020	40.7E-06	7.00E-04	(2.2E-04, 11.7E-04)
500	0.0056	1.182	18.2E-06	4.23E-04	(1.1E-04, 7.4E-04)
500	-0.012	1.093	24.1E-06	7.54E-04	(3.9E-04, 11.2E-04)
1000	-0.0214	1.083	21.8E-06	5.87E-04	(3.4E-04, 8.3E-04)
1000	-0.0552	1.226	8.54E-06	2.92E-04	(1.4E-04, 4.4E-04)
1000	-0.0214	1.073	13.9E-06	4.78E-04	(2.8E-04, 6.7E-04)
5000	0.0072	1.098	11.8E-06	4.00E-04	(3.2E-04, 4.8E-04)
5000	-0.0099	1.138	13.4E-06	4.35E-04	(3.5E-04, 5.2E-04)
5000	0.0031	1.096	9.02E-06	3.19E-04	(2.5E-04, 3.9E-04)
10000	0.0059	1.097	10.7E-06	3.70E-04	(3.2E-04, 4.2E-04)
10000	-0.0089	1.113	11.5E-06	3.87E-04	(3.3E-04, 4.4E-04)
10000	0.0026	1.092	9.62E-06	3.34E-04	((2.8E-04, 3.9E-04)

Tabla 3.6

Distribución doble exponencial, estimaciones. Caso $p_1 = 0, p_2 = 1/2$

n	θ_n	σ_n	$\hat{V}(l(X))$	$d(F_n)$	Intervalo de confianza para $d(F)$, de nivel nominal 0.90
500	0.0197	1.199	7.51E-06	2.60E-04	(0.6E-04, 4.7E-04)
500	-0.0045	1.101	8.35E-06	2.92E-04	(0.8E-04, 5.0E-04)
500	-0.0458	1.078	9.68E-06	3.07E-04	(0.8E-04, 5.4E-04)
1000	0.0096	1.161	10.1E-06	3.41E-04	(1.8E-04, 5.1E-04)
1000	-0.0125	1.128	10.3E-06	3.42E-04	(1.7E-04, 5.1E-04)
1000	-0.0291	1.117	9.73E-06	3.38E-04	(1.8E-04, 5.0E-04)
5000	0.0011	1.171	5.46E-06	1.85E-04	(1.3E-04, 2.4E-04)
5000	-0.0149	1.116	5.69E-06	1.95E-04	(1.4E-04, 2.5E-04)
5000	-0.0066	1.101	7.24E-06	2.43E-04	(1.8E-04, 3.1E-04)
10000	-0.0124	1.141	5.78E-06	1.94E-04	(1.5E-04, 2.3E-04)
10000	-0.0015	1.080	5.53E-06	1.95E-04	(1.6E-04, 2.3E-04)
10000	0.0117	1.107	5.94E-06	2.02E-04	(1.6E-04, 2.4E-04)

CAPITULO 4

Distribución asintótica nula del test

4.1 Distribución asintótica nula del test

Sea $\varepsilon > 0$ y sean p_1, p_2 números reales, $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$. Sea F una función de distribución perteneciente a la familia

$$\mathfrak{T}(p_1, p_2, \varepsilon) = \{F : F \text{ tiene derivada continua sobre la recta real y es normal sobre } (F^{-1}(p_1) - \varepsilon, F^{-1}(p_2) + \varepsilon)\}$$

Sea F_n la distribución empírica de una muestra de una variable aleatoria X con función de distribución F . Siguiendo a Durbin (1973), probamos para cada miembro de $\mathfrak{T}(p_1, p_2, \varepsilon)$, la existencia de la distribución límite de

$$nd^{(\varepsilon)}(F_n) = n \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt,$$

donde θ_n denota mediana muestral y $w = w(\varepsilon)$ es una función de peso que define la parte de la distribución considerada.

A fin de ayudar al lector hacemos a continuación un resumen de los resultados de Durbin (1973), que se usan en la demostración.

Resumen (Durbin (1973))

Sea x_1, \dots, x_n , una muestra de observaciones independientes de una variable aleatoria con función de distribución F continua, que depende de un vector θ de m parámetros $\theta_i, i = 1, \dots, m$, $F(x) = F_0(x, \theta)$, por ejemplo $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, Φ función de distribución normal estándar. Sea F_n la función de distribución empírica de x_1, \dots, x_n y sea $\hat{\theta}_n$ un estimador de θ , con la propiedad

$$(1) \quad \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(x_i, \theta) + \varepsilon_n,$$

donde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ en probabilidad y l es una función vectorial real medible con dominio la recta real, tal que $E(l(X, \theta)) = 0$.

La matriz

$$(2) \quad L = E(l(X, \theta)l^T(X, \theta)),$$

es finita y definida no negativa.

La función vectorial g definida sobre $0 < t < 1$, por

$$g_i(t) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F_0(x, \theta_i + k) - F_0(x, \theta_i)}{k}, \quad x = F^{-1}(t), \quad i = 1, \dots, m.$$

es continua.

Bajo estas hipótesis se tiene que el llamado proceso muestral estimado

$\hat{y}_n = \sqrt{n}\{\hat{F}_n(t) - t\}$, donde \hat{F}_n denota la función de distribución empírica de los datos transformados $t_i = F_0(x_i, \hat{\theta}_n)$, converge débilmente al proceso normal z con media cero y función de covarianzas

$$\rho(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2) - t_1 t_2 - h^T(t_1)g(t_2) - h^T(t_2)g(t_1) + g^T(t_1)Lg^T(t_2),$$

donde h denota la función vectorial (h_1, \dots, h_m) , con componentes definidas por

$$(3) \quad h_i(t) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(t)} l_i(x, \theta) dF(x).$$

Haciendo uso de estos resultados probamos que la distribución límite de $d^{(\varepsilon)}(F_n)$ existe para cada miembro de la familia $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, \varepsilon)}$.

Consideramos el caso: $p_1 \leq \frac{1}{2} \leq p_2$.

Prueba:

$d^{(\varepsilon)}(F) = 0$ implica que F es normal sobre el intervalo $(F^{-1}(p_1) - \varepsilon, F^{-1}(p_2) + \varepsilon)$, esto es existen números reales $\mu_0, \sigma_0 > 0$ tales que $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_0}{\sigma_0}\right)$, para todo x perteneciente

a $(F^{-1}(p_1) - \varepsilon, F^{-1}(p_2) + \varepsilon)$. Además si θ_F denota la mediana de F y σ_F el minimizador de $d^{(\varepsilon)}(F)$, se tiene $\theta_F = \mu_0$ y $\sigma_F = \sigma_0$. Entonces, si se elige como estimador de θ_F a la mediana muestral θ_n y como estimador de σ_F a σ_n el estimador de escala cuya existencia y consistencia se demuestran en la Sección 3.2.1, se tiene

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l_1^{(\varepsilon)}(x, \theta_F, \sigma_F) + \varepsilon_n^{(1)},$$

$$\sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l_2^{(\varepsilon)}(x, \theta_F, \sigma_F) + \varepsilon_n^{(2)},$$

donde

$$(4) \quad l_1^{(\varepsilon)}(x, \theta_F, \sigma_F) = \frac{\sigma_F \sqrt{2\pi}}{2} [1 - 2I_{(-\infty, 0]}(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F})],$$

$$(5) \quad l_2^{(\varepsilon)}(x, \theta_F, \sigma_F) = \frac{\sigma_F}{\int_{-\infty}^{\infty} w(t) t^2 \phi^3(t) dt} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}} w(t) t \phi^2(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} w(t) t \phi^2(t) (1 - \Phi(t)) dt \right\} \\ - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w(t) t \phi^3(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} w(t) t^2 \phi^3(t) dt} \frac{\sigma_F \sqrt{2\pi}}{2} [1 - 2I_{(-\infty, 0]}(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F})]$$

y $\varepsilon_n^{(1)}, \varepsilon_n^{(2)}$, tienden a cero en probabilidad.

Por otro lado, de las hipótesis sobre F sigue inmediatamente que existe $F_{\varepsilon, 0}$ continua con derivada continua y tal que

$$F(x) = F_{\varepsilon, 0}\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right),$$

en cada punto real x .

Entonces

$$g_1^{(\varepsilon)}(t) = F'_{\varepsilon, 0}\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right) \left(-\frac{1}{\sigma_F}\right), \quad x = F^{-1}(t) = \theta_F + \sigma_F F_{\varepsilon, 0}^{-1}(t),$$

o sea

$$(6) \quad g_1^{(\varepsilon)}(t) = F'_{\varepsilon, 0}\left(\frac{\theta_F + \sigma_F F_{\varepsilon, 0}^{-1}(t) - \theta_F}{\sigma_F}\right) \left(-\frac{1}{\sigma_F}\right) = F'_{\varepsilon, 0}(F_{\varepsilon, 0}^{-1}(t)) \left(-\frac{1}{\sigma_F}\right).$$

Análogamente

$$g_2^{(\varepsilon)}(t) = F'_{\varepsilon,0} \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) \left(-\frac{x - \theta_F}{\sigma_F^2} \right), \quad x = F^{-1}(t) = \theta_F + \sigma_F F_{\varepsilon,0}^{-1}(t),$$

o sea,

$$(7) \quad g_2^{(\varepsilon)}(t) = -F'_{\varepsilon,0}(F_{\varepsilon,0}^{-1}(t)) \frac{F_{\varepsilon,0}^{-1}(t)}{\sigma_F}.$$

Así, ambas funciones $g^{(\varepsilon)}$ resultan continuas sobre $0 < t < 1$.

Para completar la prueba de existencia de la distribución límite de $nd^{(\varepsilon)}(F_n)$ falta probar que la matriz L en (2) es finita definida no negativa. L es función de ε y en este punto resulta conveniente mudar a la notación $L(\varepsilon)$.

Haciendo uso del teorema de la convergencia dominada, se puede mostrar que $L(\varepsilon)$ es una función continua para todo $\varepsilon > 0$ y que la matriz $L(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon)$ existe y

es la misma para cada miembro de la familia $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, 0)}$, la cual es una subfamilia de $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2)}$, definida en la introducción de este capítulo.

Entonces, si $L(0)$ es definida positiva, por el teorema de la permanencia del signo, $L(\varepsilon)$ es también definida positiva cualquiera sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

A continuación se da la matriz $L(0)$ para dos casos de interés.

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{1}{2} \quad L(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2 \pi}{2} & \frac{\sigma^2 \sqrt{2\pi}(3 - \sqrt{3})}{4} \\ \frac{\sigma^2 \sqrt{2\pi}(3 - \sqrt{3})}{4} & \frac{27\sigma^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9} \right) \end{bmatrix}$$

$$p_1 = 0, p_2 = 1 \quad L(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2 \pi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{4} \left(\frac{27}{\sqrt{5}} - 9 \right) \end{bmatrix}$$

A modo de resumen enunciamos los resultados alcanzados en forma de teorema.

Teorema 4.1

Sea $\varepsilon > 0$ y sean p_1, p_2 números reales tales que $0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$. Sea F una función de distribución perteneciente a la familia $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, \varepsilon)}$. Sea x_1, \dots, x_n una muestra de F , F_n la función de distribución empírica de los x_i y \hat{F}_n la función de distribución empírica de los datos transformados $t_i = \Phi\left(\frac{x_i - \theta_n}{\sigma_n}\right)$, donde θ_n denota la mediana muestral y σ_n el estimador de escala cuya existencia y consistencia se prueban en la Sección 3.2.1. Entonces, si escribimos $nd^{(\varepsilon)}(F_n)$ en la forma

$$nd^{(\varepsilon)}(F_n) = \int_0^1 \left[\sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - t) \right]^2 w(\Phi^{-1}(t)) dt,$$

tenemos que

$$(8) \quad \left[\sqrt{n}(\hat{F}_n(t) - t) \right] \sqrt{w(\Phi^{-1}(t))}$$

converge débilmente al proceso normal z con media cero y función de covarianzas dada por

$$\rho(t_1, t_2) = \{ \min(t_1, t_2) - t_1 t_2 - h^{(\varepsilon)T}(t_1) g^{(\varepsilon)}(t_2) - h^{(\varepsilon)T}(t_2) g^{(\varepsilon)}(t_1) + g^{(\varepsilon)T}(t_1) L g^{(\varepsilon)T}(t_2) \} \sqrt{w(\Phi^{-1}(t_1))} \sqrt{w(\Phi^{-1}(t_2))}$$

donde las funciones $g_i^{(\varepsilon)}$, $i = 1, 2$ están dadas respectivamente por (6) y (7) y las funciones $h_i^{(\varepsilon)}$, $i = 1, 2$, se calculan según (3), integrando (4) y (5) respectivamente. Por otro lado, como $d^{(\varepsilon)}(F)$ es continua en la métrica de Skorokhod, tenemos que

$$(9) \quad nd^{(\varepsilon)}(F_n)$$

tiene distribución límite y es la de la variable

$$\int_0^1 z(t)w(\Phi^{-1}(t))dt.$$

Nota: la distribución límite de $nd^{(\varepsilon)}(F_n)$ depende de $\varepsilon > 0$ y del particular miembro F perteneciente a la familia nula $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, \varepsilon)}$. Por otro lado, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la función de covarianzas $\rho^{(\varepsilon)}$ del proceso límite, tiende a digamos $\rho^{(0)}$, que resulta independiente de ε y del particular miembro de $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, 0)}$.

Con el respaldo de estos argumentos conjeturamos y a posteriori verificamos empíricamente que $nd^{(0)}(F_n)$ tiene una distribución límite que es la misma para cada miembro de la familia $\mathfrak{S}^{(p_1, p_2, 0)}$. A continuación mediante simulación Monte Carlo, se estiman algunos percentiles superiores para los casos de interés $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$ y $p_1 = 0$, $p_2 = 1$. Resultados, dados mediante intervalos de confianza de nivel 0.99, se muestran en las Tablas 4.1 y 4.2, respectivamente.

Tabla 4.1

Percentiles superiores de la distribución de $nd^{(0)}(F_n)$, estimados mediante simulación Monte Carlo. Caso $p_1 = 0, p_2 = 1/2$.

n	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
51	(0.014, 0.015)	(0.022, 0.023)	(0.032, 0.033)	(0.041, 0.042)	(0.061, 0.062)
101	(0.014, 0.015)	(0.022, 0.023)	(0.033, 0.034)	(0.041, 0.042)	(0.062, 0.064)

Tabla 4.2

Percentiles superiores de la distribución de $nd^{(0)}(F_n)$, estimados mediante simulación Monte Carlo. Caso $p_1 = 0, p_2 = 1$.

n	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
51	(0.053, 0.056)	(0.085, 0.089)	(0.136, 0.140)	(0.176, 0.181)	(0.27, 0.29)
101	(0.054, 0.056)	(0.087, 0.089)	(0.137, 0.139)	(0.17, 0.19)	(0.27, 0.29)

Puesto que en el caso $p_1 = 0, p_2 = 1/2$, el test se calcula integrando sobre la mitad del recorrido correspondiente al caso $p_1 = 0, p_2 = 1$, se podría esperar que los percentiles de la Tabla 4.2 fueran el doble de los de la Tabla 4.1. Esto no ocurre debido a la estimación de la escala. A fin de poder realizar comparaciones agregamos la Tabla 4.3 con algunos percentiles superiores de la distribución asintótica nula del estadístico W^2 para distintos casos, incluidos los correspondientes a las Tablas 4.1 y 4.2.

Tabla 4.3

Percentiles superiores de la distribución
asintótica nula del estadístico de tipo Cramér -von Mises

$$W^2 = nd(F_n) = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma_n t) - \Phi(t)]^2 w(t) \varphi(t) dt, \text{ distintos casos.}$$

Caso / p	0.50	0.75	0.90	0.95	0.99
Clásico: $w(t)=1$ θ_n : media muestral σ_n : desviación estándar muestral	0.0509		0.1035	0.1260	0.1788
$w(t)=1$ θ_n : mediana muestral σ_n : desv.est.muest. respecto de θ_n (*)	0.064	0.100	0.151	0.192	0.294
$w(t)=1$ θ_n : mediana muestral σ_n : distancia mínima	0.055	0.088	0.138	0.17	0.28
$w(t) = I_{(-\infty,0]}(t) \text{ ó } I_{[0,\infty)}(t)$ θ_n : mediana muestral σ_n : desv.est.muest.derecha o izquierda (+)	0.020	0.033	0.051	0.065	0.104
$w(t) = I_{(-\infty,0]}(t) \text{ ó } I_{[0,\infty)}(t)$ θ_n : mediana muestral σ_n : distancia mínima	0.014	0.022	0.033	0.041	0.063

$$(*) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \theta_n)^2$$

$$(+) \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n w(t_i)(t_i - \theta_n)^2$$

CAPITULO 5

Aplicaciones

5.1 Diagnóstico por partes

Sea x_1, \dots, x_n una muestra de una variable aleatoria X con función de distribución F definida por

$$F(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad F(x) = \frac{1}{2^{20} \Gamma(20)} \int_0^x z^{19} e^{-z/2} dz, \text{ si } x \leq M = 39.3354,$$

$$F(x) = 1 - (1/2) \exp(-0.09(x - M)) \text{ si } x > M$$

Así, F es $\chi^2(40)$ a la izquierda de su mediana M y exponencial a su derecha.

La herramienta estadística propuesta en este trabajo permite realizar inferencia sobre la forma de F en distintas partes del recorrido de X , pudiéndose de esta manera realizar un diagnóstico más objetivo y preciso.

Para distintos tamaños de muestra (cada muestra obtenida agregando nuevos datos a la muestra anterior) se calculan el estadístico $W^2 = nd(F_n)$ (cuyos percentiles asintóticos se dan en las Tablas 4.1 y 4.2) e intervalo de confianza de nivel 0.90 para la distancia de F

a la familia normal, sobre cada una de las partes $(-\infty, M)$ y (M, ∞) , donde M denota mediana de F . Los resultados se muestran en la Tabla 5.1.

Para $n \geq 2400$, a un nivel de significación del 5%, el test rechaza normalidad para la mitad izquierda de la distribución. Este hecho indeseable (puesto que la distribución $\chi^2(40)$ es considerada prácticamente normal) se debe a que frente a cualquier alternativa, la potencia del test tiende a uno cuando el tamaño de muestra crece sin límite, propiedad compartida con muchos otros tests de normalidad. Por otro lado, los extremos derechos de los intervalos de confianza para esta mitad, declaran grados de normalidad crecientes, conforme el tamaño de muestra crece. Así, por ejemplo para $n = 9600$, con un riesgo menor al 5% (ver Tabla 3.3) la correspondiente declaración es: el grado de normalidad de la mitad izquierda es superior al de una distribución $\chi^2(20)$.

Por el contrario, para la mitad derecha, los extremos izquierdos de los correspondientes intervalos de confianza, declaran grados de normalidad decrecientes, conforme el tamaño de muestra crece. En particular, para $n = 9600$, con un riesgo de a lo sumo el 5%, podemos afirmar (ver Tabla 3.3) que el grado de normalidad de la mitad derecha es menor al de una distribución $\chi^2(4)$.

Tabla 5.1

Caso: F es $\chi^2(40)$ -exponencial

Parte	$W^2 = nd(F_n)$	Intervalo de confianza para $d(F)$ (Extremos están multiplicados por 10^4)
n=300		
$(-\infty, M)$	0.0280	(0.042, 1.821)
(M, ∞)	0.0584	(0, 4.071)
n=600		
$(-\infty, M)$	0.0199	(0, 0.704)
(M, ∞)	0.1258	(0.57, 3.61)
n=1200		
$(-\infty, M)$	0.0284	(0.049, 0.424)
(M, ∞)	0.3061	(1.32, 3.78)
n=2400		
$(-\infty, M)$	0.0814	(0.081, 0.597)
(M, ∞)	0.6535	(1.81, 3.63)
n=4800		
$(-\infty, M)$	0.1389	(0.093, 0.486)
(M, ∞)	1.0982	(1.68, 2.89)
n=9600		
$(-\infty, M)$	0.1822	(0.084, 0.296)
(M, ∞)	2.1572	(1.81, 2.68)
$(-\infty, \infty)$	11.5823	(10.18, 13.94)

5.2 El uso de variables perturbadas en estimación

Sea d el funcional en el cual se basa el test propuesto en este trabajo, esto es

$$d(F) = \inf_{\sigma > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt,$$

donde θ_F , denota la media o la mediana de F y w es una función de peso que define la región de interés. Sea x_1, \dots, x_n una muestra de una distribución desconocida F . La teoría asintótica desarrollada en el Capítulo 3, permite la construcción de un intervalo de confianza para la distancia $d(F)$ de F a la familia normal. Entonces, si se dispone de una tabla de distancias asociadas a los miembros de una familia de referencia como ser la familia de distribuciones t de Student o la familia de distribuciones χ^2 cuadrado, es posible por comparación, asignar a F un grado de normalidad según d . Así por ejemplo, es posible afirmar con riesgo predeterminado α , que F tiene un grado de normalidad superior al de la distribución t con 30 grados de libertad, o que F tiene un grado de normalidad inferior al de una distribución t con 10 grados de libertad, etc.

Un campo de aplicación es el estudio de la velocidad de convergencia de la distribución de un estimador a la distribución normal o la comparación de esta velocidad con la de otro estimador del mismo parámetro, mediante simulación Monte Carlo. En este contexto, a modo de ejemplo, usamos el test propuesto, para estudiar el comportamiento de estimadores con "muestras perturbadas". Consideramos el caso: estimación de la media de una distribución Bernoulli.

Planteo del problema:

Consideremos la familia de funciones de distribución $\mathfrak{F}^{(p)}$ con miembros $F^{(p)}$,
definidos por

$$\begin{aligned} F^{(p)}(x) &= 0 \text{ si } x < 0, \\ &= 1 - p \text{ si } 0 \leq x < 1, \\ &= 1 \text{ si } x \geq 1 \end{aligned}$$

para $p \neq 0$ y $p \neq 1$; y por

$$\begin{aligned} F^{(p)}(x) &= 0 \text{ si } x < 0, \\ &= 1 \text{ si } x \geq 0 \end{aligned}$$

si $p = 0$;

$$\begin{aligned} F^{(p)}(x) &= 0 \text{ si } x < 1, \\ &= 1 \text{ si } x \geq 1 \end{aligned}$$

si $p = 1$.

Entonces, se sabe que

$$\sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p))$$

si $p \neq 0$ y $p \neq 1$.

En cambio

$$\sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{D} I_{[0, \infty)},$$

si $p = 0$ y

$$\sqrt{n}(\bar{X} - p) \xrightarrow{D} I_{[1, \infty)},$$

si $p = 1$.

Así, la distribución asintótica de la media muestral normalizada, para muestras de $F^{(p)}$, es normal si $0 < p < 1$ y (extremadamente) no normal si $p = 0$ ó $p = 1$. Esta discontinuidad de forma de la distribución límite para $p = 0$ y $p = 1$, trae como consecuencia una baja velocidad de convergencia a la distribución normal de la media muestral, para muestras de $F^{(p)}$ si p es próximo a cero o a uno; tanto más baja cuanto mayor sea la proximidad.

Para abordar esta problemática, el autor de esta Tesis, propone reemplazar a la población original $F^{(p)}$, por la mezcla cuya media es también p , definida por:

$$F^{(\delta,p)}(x) = (1-p)U(-\delta, \delta) + pU(1-\delta, 1+\delta),$$

donde U denota distribución uniforme y δ es un número real positivo.

Si x_1, \dots, x_n es una muestra de $F^{(p)}$, una muestra de $F^{(\delta,p)}$ se obtiene perturbando las observaciones x_i con observaciones artificiales u_i independientes e independientes de las x_i , $u_i \sim U(-\delta, \delta)$. Esto es, $y_i = x_i + u_i, i = 1, \dots, n$ es una muestra de $F^{(\delta,p)}$. Entonces por aplicación del teorema límite central, se tiene que:

$$\sqrt{n}(\bar{Y} - p) \xrightarrow{D} N(0, p(1-p) + \frac{\delta^2}{3}),$$

para todo $p, 0 \leq p \leq 1$, cualquiera sea $\delta > 0$.

Con esta idea se logra evitar la discontinuidad de forma de la distribución límite de la media muestral para $p = 0$ y $p = 1$. Es más, para estos valores de p , la media muestral, por ser suma de variables aleatorias uniformes, tiene distribución casi normal aun para tamaños de muestra tan chicos como $n=10$. Esto representa un cambio rotundo de situación.

En las aplicaciones, si se quiere usar a \bar{Y} como estimador de p , el nuevo parámetro δ incorporado al problema, obra como “acelerador” de la convergencia a la distribución límite normal, pero al mismo tiempo agrega variabilidad al estimador. La llamada cota de Berry-Esseen como herramienta teórica más experimentación Monte Carlo, permiten elegir δ con “justeza”: para un tamaño de muestra n dado, δ se elige lo más chico posible y tal que \bar{Y} tenga un “grado de normalidad” suficiente para asegurar un nivel de confianza muy próximo al nivel nominal elegido, independientemente de cual sea el valor del estimando p .

La Tabla 5.2 contiene intervalos de confianza de nivel 0.98 para la distancia a la familia normal de:

(a) la función de distribución (llamamos $F^{(n)}$) de la variable $\sqrt{n}(\bar{X} - p)$, y

(b) la función de distribución (llamamos $G^{(n)}$) de la variable $\sqrt{n}(\bar{Y} - p)$;

para $n = 500$, $\delta = 0.15$ y distintos valores del parámetro p . Los resultados están basados en 10000 observaciones Monte Carlo de las variables \bar{X} e \bar{Y} . Esta tabla muestra resultados congruentes con los mencionados en los párrafos precedentes. En ella se observa con claridad el efecto nefasto de la proximidad de p a cero sobre el “grado de normalidad” de la distribución del estadístico \bar{X} . Así mismo, muestra que el efecto de perturbar las observaciones, modifica radicalmente la situación: el “grado de normalidad” de la distribución de \bar{Y} es mucho mayor sobre todo el espacio paramétrico $0 \leq p \leq 1$.

Tabla 5.2

Intervalos de confianza de nivel 0.98 (basados en 10000 observaciones de \bar{X} e \bar{Y}) para la distancia a la familia normal de la distribución de $\sqrt{n}(\bar{X} - p)$ (segunda columna) y de $\sqrt{n}(\bar{Y} - p)$ (tercera columna). Extremos de los intervalos están multiplicados por 10^4 .

$$n = 500, \varepsilon = 0.15$$

p	$10^4 d(F^{(n)})$	$10^4 d(G^{(n)})$
0.001	(207, 219)	(0, 0.009)
0.005	(36.4, 39.3)	(0, 0.42)
0.01	(17, 19)	(0.03, 0.7)
0.05	(3.66, 4.31)	(0, 0.34)
0.10	(1.77, 2.26)	(0, 0.17)
0.20	(0.56, 0.87)	(0, 0.02)
0.50	(0.26, 0.67)	(0, 0.1)

5.3 Una observación

El estadístico propuesto puede usarse para contrastar normalidad con muestras truncadas en los casos $p_1 = 0, p_2 = 1/2$ ó $p_1 = 1/2, p_2 = 1$. Esto es, los datos a la izquierda o derecha de la mediana muestral, son suficientes para realizar inferencia sobre la mitad de la distribución correspondiente. En los demás casos se necesitan todos los datos para realizar inferencia sobre la parte de la distribución que interesa.

CAPITULO 6

6.1 Comentarios finales y proyectos a futuro

Existen situaciones en las que se necesita modelar sólo una parte de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, siendo la otra parte irrelevante para el problema considerado. El problema de contrastar bondad de ajuste de una parte es esencialmente distinto al de contrastar bondad de ajuste de toda la distribución y demanda la construcción de un procedimiento diseñando a tal efecto.

En este trabajo se plantea el problema de contrastar normalidad de una parte determinada del recorrido de una variable aleatoria. Para tal fin se propone un estadístico de tipo Cramér-von Mises y se calculan la distribuciones asintóticas del mismo bajo la familia nula y bajo la familia de distribuciones alternativas. Esta última permite la construcción de un intervalo de confianza para la distancia de la función de distribución de la variable aleatoria observada a la familia normal. Mediante este intervalo de confianza es posible asignar un "grado de normalidad" a la función de distribución de la variable observada, sobre cada región de interés. Este hecho permite un uso más efectivo de los datos. También, estos intervalos de confianza pueden usarse con éxito en experimentación Monte Carlo, como una herramienta exploratoria, por ejemplo, para

apoyar o descartar la conjetura de que un estadístico bajo estudio tiene distribución asintótica normal o para comparar la velocidad de convergencia a la distribución normal de dos estimadores de un mismo parámetro.

Por otro lado, en situaciones donde los datos se obtienen ordenados (por ejemplo al observar “el tiempo para fallar” o duración de un dispositivo electrónico puesto en servicio o de una barra de acero sometida a una carga, etc), la mitad de los mismos son suficientes para contrastar normalidad de la mitad izquierda de la distribución.

Existen en la literatura diversas “distancias” de una función de distribución F a la familia normal. Estas distancias en general involucran a la media y a la desviación estándar de F como parámetros de posición y escala, respectivamente. A los fines de considerar una parte de la distribución nos pareció adecuada una distancia que involucra a la media o mediana de F , como parámetro de posición y a la desviación estándar de la distribución normal más próxima, como parámetro de escala. Sin embargo, durante el desarrollo del trabajo se vio que la función de peso empleada, ignora o casi ignora las discrepancias con el modelo normal, que ocurren en las colas. Entonces, una línea de trabajo podría ser: replantear el problema de contrastar normalidad de una parte de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, modificando adecuadamente la función de peso en la definición de distancia y de tal suerte que puedan aprovecharse los resultados teóricos obtenidos durante el desarrollo de este trabajo.

APENDICE

A.1. Mayorante de una subfamilia de la familia de funciones

$$\Psi = \{f_{(a,b)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{(a,b)}(x) = \phi(ax+b) \sum_{j=0}^1 |ax+b|^j \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

Lema A.1.1

Si $a_0 \neq 0$, $|a - a_0| < \frac{|a_0|}{2}$, $|b - b_0| < |a_0|$, l es un entero, $l \geq 0$, entonces

$\exists C > 0$, independiente de x : $\forall x$ real, $\phi(ax+b) \sum_{j=0}^1 |ax+b|^j \leq C e^{-\frac{1}{4}a_0^2 x^2} (1+|x|)^l$

Demostración: Si $a^2 \neq \frac{1}{2}a_0^2$,

$$\begin{aligned}
 (1) \quad -\frac{1}{2}(ax+b)^2 &= -\frac{1}{2}a^2x^2 - abx - \frac{1}{2}b^2 \\
 &= -\frac{1}{4}a_0^2x^2 + \frac{1}{4}a_0^2x^2 - \frac{1}{2}a^2x^2 - abx - \frac{1}{2}b^2 \\
 &= -\frac{1}{4}a_0^2x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_0^2 - a^2\right)\left[x - \frac{ab}{\frac{1}{2}a_0^2 - a^2}\right]^2 - \\
 &\quad \frac{1}{2}\frac{(ab)^2}{\frac{1}{2}a_0^2 - a^2} - \frac{1}{2}b^2
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si

$$|a - a_0| < \frac{|a_0|}{10} \text{ y } |b - b_0| < |a_0|,$$

entonces

$$-\frac{71}{100}a_0^2 < \frac{1}{2}a_0^2 - a^2 < -\frac{31}{100}a_0^2 < 0, \quad a^2 < \frac{121}{100}a_0^2 \text{ y } b^2 < (|a_0| + |b_0|)^2,$$

de donde sigue inmediatamente

$$(2) \quad \phi(ax+b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(ax+b)^2} \leq \frac{e^{\frac{121}{62}(|a_0|+|b_0|)^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}a_0^2x^2}.$$

También, si j es un entero no negativo, y puesto que

$$|ax+b| \leq |a||x| + |b| \leq \left(\frac{|a_0|}{10} + |a_0|\right)x + |a_0| \leq \frac{11}{10}|a_0|(1+|x|)^j,$$

se obtiene inmediatamente

$$(3) \quad |ax+b| \leq |a||x| + |b| \leq \left(\frac{|a_0|}{10} + |a_0|\right)|x| + |a_0| \leq \frac{11}{10}|a_0|(|x| + 1)$$

De (2) y (3) se deduce finalmente que,

$$\phi(ax+b) \sum_{j=0}^1 |ax+b|^j \leq \frac{e^{\frac{121}{62}(|a_0|+|b_0|)^2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}a_0^2x^2} (1+1) \max\left\{1, \left(\frac{11}{10}|a_0|\right)^1\right\} (1+|x|)^1,$$

donde

$$(4) \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{121}{62}(|a_0|+|b_0|)^2} (1+1) \max\{1, (\frac{11}{10}|a_0|)^1\}.$$

Como C es independiente de x, la prueba está completa.

A.2. Fórmulas alternativas de cálculo para

$$(1) \quad d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt.$$

Son las siguientes:

$$(2) \quad d_F(\mu, \sigma) = - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) dF^2(\mu + \sigma t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t) dF(\mu + \sigma t) + k$$

donde

$$\alpha(t) = \int_{-\infty}^t w(x) \phi(x) dx, \quad \beta(t) = \int_{-\infty}^t w(x) \phi(x) \Phi(x) dx,$$

$$k = -2\beta(\infty) + \alpha(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(x) w(x) \phi(x) dx$$

(3)

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt$$

Demostración:

Como w y ϕ son continuas, α es continua y derivable, con derivada $\alpha' = w\phi$ continua y en consecuencia la integral de Riemann del segundo miembro de (1), se puede escribir como la integral de Riemann-Stieljes

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 d\alpha(t).$$

Llamando $G(t) = F(\mu + \sigma t)$ e integrando por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} d_F(\mu, \sigma) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) d[G(t) - \Phi(t)]^2 \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) dG^2(t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) d[G(t)\Phi(t)] - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) d\Phi^2(t) \end{aligned}$$

Integrando por partes la segunda de estas integrales, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t) d[G(t)\Phi(t)] &= - \int_{-\infty}^{\infty} G(t)w(t)\phi(t)\Phi(t)dt + \alpha(\infty) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} G(t)d\beta(t) + \alpha(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(t)dG(t) - \beta(\infty) + \alpha(\infty) \end{aligned}$$

Reuniendo resultados y escribiendo $F(\mu + \sigma t)$ en lugar de $G(t)$, se obtiene (2). (3) resulta de integrar por partes ambas integrales de (2)..

A.3. Continuidad de d_F .

Lema A.3.1

Para toda función de distribución F , d_F , definida por

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t) \phi(t) dt,$$

es continua sobre el semiplano $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$

Demostración:

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt$$

(ver (3), A.2).

Entonces, para probar la continuidad de d_F , es suficiente probar que tanto la primera como la segunda integral, definen funciones continuas. A tal efecto llamemos

$$a(t) = w(t)\phi(t), \quad b(t) = -2w(t)\phi(t)\Phi(t) \text{ y}$$

$$A(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) a(t) dt,$$

$$B(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) b(t) dt$$

Probamos primero que B es continua.

Haciendo el cambio de variable $\mu + \sigma t = x$, escribimos

$$B(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) b\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx,$$

de manera que, aplicando en el integrando, el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función b, en el intervalo con extremos en los puntos

$$\frac{x - (\mu + h)}{\sigma + k} \text{ y } \frac{x - \mu}{\sigma},$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
 |B(\mu+h, \sigma+k) - B(\mu, \sigma)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) [b(\frac{x-(\mu+h)}{\sigma+k}) - b(\frac{x-\mu}{\sigma})]| \frac{1}{\sigma} dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |b'(\frac{x-\mu}{\sigma} - \theta [\frac{k}{\sigma+k} \frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{h}{\sigma+k}])| |\frac{k}{\sigma+k} \frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{h}{\sigma+k}| \frac{1}{\sigma} dx \\
 &\leq \frac{|k|}{|\sigma+k|} \int_{-\infty}^{\infty} |b'(\frac{x-\mu}{\sigma} - \theta [\frac{k}{\sigma+k} \frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{h}{\sigma+k}])| |\frac{x-\mu}{\sigma}| \frac{1}{\sigma} dx + \\
 &\quad \frac{|h|}{|\sigma+k|} \int_{-\infty}^{\infty} |b'(\frac{x-\mu}{\sigma} - \theta [\frac{k}{\sigma+k} \frac{x-\mu}{\sigma} + \frac{h}{\sigma+k}])| \frac{1}{\sigma} dx
 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $(x-\mu)/\sigma = t$, escribimos:

$$\begin{aligned}
 |B(\mu+h, \sigma+k) - B(\mu, \sigma)| &\leq \frac{|k|}{|\sigma+k|} \int_{-\infty}^{\infty} |b'([1 - \frac{\theta k}{\sigma+k}]t - \frac{\theta h}{\sigma+k})| |t| dt + \\
 &\quad \frac{|h|}{|\sigma+k|} \int_{-\infty}^{\infty} |b'([1 - \frac{\theta k}{\sigma+k}]t - \frac{\theta h}{\sigma+k})| dt,
 \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta(h, k, t)$, $0 < \theta < 1$

Para completar la prueba de continuidad de B , es suficiente probar que estas dos últimas integrales están acotadas en un cierto entorno de $(h, k) = (0, 0)$.

Por otro lado, como

$$b'(t) = -2w'(t)\phi(t)\Phi(t) + 2w(t)\Phi(t)\phi'(t) - 2w(t)\phi(t)\phi'(t)$$

y w, w', ϕ y Φ son funciones acotadas, es claro existe $K > 0$, tal que

$$|b'(t)| \leq K\phi(t)(1+|t|), \quad -\infty < t < \infty,$$

y entonces, la acotación de las integrales, surge inmediatamente de la aplicación del Lema

A.1.1, con $a_0=1$, $b_0=0$.

La prueba de que A es continua, no requiere de nuevos argumentos y se logra reemplazando en la prueba de continuidad de B, F por F^2 y b, b' por a, a' respectivamente.

A.4. Derivadas parciales de d_F .

Lema A.4.1

Si d_F denota la función definida por

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\mu + \sigma t) - \Phi(t)]^2 w(t)\phi(t) dt, \quad -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

entonces, para toda función de distribución F y para todo (μ, σ) , $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$, se tiene:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi(t) dF^2(\mu + \sigma t) - \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi(t)\Phi(t) dF(\mu + \sigma t)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\mu, \sigma) = -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t)[w(t)\phi(t)]' dt + \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t)[w(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} tw(t)\phi(t) dF^2(\mu + \sigma t) - \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} tw(t)\phi(t)\Phi(t) dF(\mu + \sigma t)$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\mu, \sigma) = -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t)[tw(t)\phi(t)]' dt + \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t)[tw(t)\phi(t)\Phi(t)]' dt$$

Prueba de (2).

Teniendo en cuenta que (ver (3), A.2)

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt,$$

para probar (2), es suficiente probar que

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt = -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) [w(t) \phi(t)]' dt$$

y

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\infty} -2F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt = \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) [w(t) \phi(t) \Phi(t)]' dt$$

Haciendo el cambio de variable $\mu + \sigma t = x$ y llamando $a(t) = w(t) \phi(t)$, escribimos (5)

como:

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx = -\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx$$

Llamando,

$$A(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dx,$$

queremos probar que

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{A(\mu + h, \sigma) - A(\mu, \sigma)}{h} + \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \right| = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{A(\mu+h, \sigma) - A(\mu, \sigma)}{h} &= \frac{1}{\sigma h} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \left[a\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{h}{\sigma}\right) - a\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] dx \\ &= \frac{1}{\sigma h} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{h}{\sigma}\right) \left(-\frac{h}{\sigma}\right) dx \\ &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{h}{\sigma}\right) dx \end{aligned}$$

Luego:

(8)

$$\begin{aligned} \left| \frac{A(\mu+h, \sigma) - A(\mu, \sigma)}{h} + \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx \right| &= \frac{1}{\sigma^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \left[a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{\theta h}{\sigma}\right) - a'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] dx \right| \\ \frac{1}{\sigma^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) a''\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{\theta \theta' h}{\sigma}\right) \frac{\theta h}{\sigma} dx \right| &\leq \frac{|h|}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left| a''\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - \frac{\tilde{\theta} h}{\sigma}\right) \right| dx = \frac{|h|}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} |a''(t - \frac{\tilde{\theta} h}{\sigma})| dt, \end{aligned}$$

donde $\tilde{\theta} = \theta \theta' = \tilde{\theta}(h, k, t)$, $0 < \tilde{\theta} < 1$

Para probar (7) es suficiente probar que la última integral de (8) está acotada en un cierto entorno de $h=0$. Esto surge inmediatamente del hecho:

$$\exists K > 0: |a''(t)| \leq K \phi(t)(1 + |t| + |t|^2), \quad \forall t: -\infty < t < \infty$$

y de la aplicación del Lema A.1.1, con $a_0 = 1$ y $b_0 = 0$.

No se incluye la prueba de (6) ni de (4), por cuanto no se requieren argumentos distintos de aquellos empleados en la demostración de (5) y en consecuencia son casi una mera copia de ésta. Por otro lado, (1) y (3) se obtienen de integrar por partes (2) y (4), respectivamente.

Nota: Es importante destacar que las fórmulas (1), (2), (3) y (4) se obtienen formalmente de aquella para d_F ((3), A.2) suponiendo que (i) F' existe y que (ii) es válido derivar bajo el signo integral, y reemplazado luego $F'(\mu+\sigma) \sigma dt$ por $dF(\mu+\sigma)$.

Ejemplo: Derivando respecto de μ , bajo el signo integral en

$$d_F(\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t) w(t) \phi(t) dt,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\mu, \sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\mu + \sigma t) F'(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F'(\mu + \sigma t) w(t) \phi(t) \Phi(t) dt \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) 2F(\mu + \sigma t) F'(\mu + \sigma t) \sigma dt - \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) \Phi(t) F'(\mu + \sigma t) \sigma dt \\ &= \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) dF^2(\mu + \sigma t) - \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) \Phi(t) dF(\mu + \sigma t) \end{aligned}$$

Análogamente, llamando

$$a(t) = tw(t)\phi(t), \quad b(t) = tw(t)\phi(t)\Phi(t),$$

escribimos (4) en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\mu, \sigma) = -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) a'(t) dt + \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) b'(t) dt$$

Luego, derivando respecto de σ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) a'(t) dt - \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2F(\mu + \sigma t) F'(\mu + \sigma t) \sigma t a'(t) dt \\ &\quad - \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) b'(t) dt + \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F'(\mu + \sigma t) \sigma t b'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} a(t) dF^2(\mu + \sigma t) - \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} ta'(t) dF^2(\mu + \sigma t) \\
&\quad + \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} b(t) dF(\mu + \sigma t) + \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} tb'(t) dF(\mu + \sigma t) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} [ta(t)]' dF^2(\mu + \sigma t) + \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} [tb(t)]' dF(\mu + \sigma t) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\mu + \sigma t) [ta(t)]'' dt - \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu + \sigma t) [tb(t)]'' dt
\end{aligned}$$

Lema A.4.2

Si F tiene una densidad f simétrica y continua y θ_F denota la mediana de F , entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma) = 0 \text{ para todo } \sigma > 0, \text{ si } w \text{ es una función par, esto es } w(-x) = w(x) \text{ para}$$

todo x real.

Demostación:

Según la fórmula (1), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) dF^2(\theta_F + \sigma t) - \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \phi(t) \Phi(t) dF(\theta_F + \sigma t)$$

Luego, como $F' = f$ es continua, podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial \mu} d_F(\theta_F, \sigma) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [F(\theta_F + \sigma t) - \Phi(t)] w(t) \phi(t) dt$$

Resultado sigue de observar que el integrando, llamemos g , es una función impar, esto es,

$$g(-x) = -g(x) \text{ para todo } x \text{ real.}$$

A.5 Teorema 3.2

Sean X_1, \dots, X_n, X variables aleatorias iid según F ; sea θ_F un parámetro de posición de F (tal como la media o la mediana) y sea $\theta_n = \theta_n(X_1, \dots, X_n)$ un estimador de θ_F .

Si

$$(i) \quad \theta_n \xrightarrow{CPI} \theta_F,$$

$$(ii) \quad \text{existe } l^* : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ tal que } E(l^*(X)) = 0 \text{ y}$$

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l^*(x_i) + \varepsilon_n^*, \text{ donde } \varepsilon_n^* \xrightarrow{P} 0,$$

entonces, σ_n (el estimador de escala cuya existencia y consistencia se muestran en el Teorema 3.1), tiene las siguiente propiedades:

$$\sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l^{**}(x_i) + \varepsilon_n^{**}, \text{ donde } \varepsilon_n^{**} \xrightarrow{P} 0 \text{ y}$$

$$l^{**}(x) = \frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x, \infty)}(t) - F(t)][F(t)a'(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}) - b'(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F})] dt$$

$$- \left[\frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} [F^2(t)a''(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}) - 2F(t)b''(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F})] dt \right] l^*(x),$$

$$a(t) = tw(t)\phi(t), \quad b(t) = tw(t)\phi(t)\Phi(t).$$

Demostración:

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial a $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma)$ en el intervalo con extremos en los puntos σ_F y σ_n , se tiene

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_n) - \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) = (\sigma_n - \sigma_F) \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \theta_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F)),$$

donde $\lambda = \lambda(n)$, $0 < \lambda < 1$.

Como $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) = 0$ y también $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta_n, \sigma_n) = 0$, podemos escribir (10) como

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_n) - \frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta_n, \sigma_n) = (\sigma_n - \sigma_F) \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F))$$

Llamando

$$a(t) = tw(t)\phi(t), \quad b(t) = tw(t)\phi(t)\Phi(t),$$

escribimos el primer miembro de (11) como (Ver A.4, (4))

(12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_n) - \frac{\partial}{\partial \sigma} d_{F_n}(\theta_n, \sigma_n) &= \frac{1}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^2(\theta_n + \sigma_n t) - F^2(\theta_F + \sigma_n t)] a'(t) dt \\ &\quad - \frac{2}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma_n t) - F(\theta_F + \sigma_n t)] b'(t) dt \end{aligned}$$

= $A_n - B_n$, donde

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^2(\theta_n + \sigma_n t) - F^2(\theta_F + \sigma_n t)] a'(t) dt \text{ y}$$

$$(13) \quad B_n = \frac{2}{\sigma_n} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(\theta_n + \sigma_n t) - F(\theta_F + \sigma_n t)] b'(t) dt.$$

La demostración consiste en descomponer A_n y B_n como

$$A_n = A_{1n} + A_{2n} + A_{3n},$$

$$B_n = B_{1n} + B_{2n},$$

donde

$$\sqrt{n}A_{3n} \xrightarrow{P} 0,$$

$$A_{1n} = \frac{2}{\sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x)a'\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right)dx + \text{términos que multiplicados por } \sqrt{n}$$

tienden a cero en probabilidad,

$$A_{2n} = -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)a''\left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}\right)dt + \text{términos que multiplicados por } \sqrt{n} \text{ tienden a}$$

cero en probabilidad,

$$B_{1n} = \frac{2}{\sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]b'\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right)dx + \text{términos que multiplicados por } \sqrt{n} \text{ tienden a}$$

cero en probabilidad,

$$B_{2n} = \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F}\right)dt + \text{términos que multiplicados por } \sqrt{n} \text{ tienden}$$

a cero en probabilidad.

Como, de la continuidad de $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F$ y de la consistencia fuerte de σ_n se concluye que el

factor $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F))$ del segundo miembro de (11), tiende con

probabilidad 1 a $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F)$, la demostración se completa haciendo uso de la

hipótesis (ii) y de la definición de función de distribución empírica

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i).$$

A continuación se dan los detalles del esquema expuesto.

Haciendo el cambio de variable $\theta_n + \sigma_n t = x$, escribimos B_n en la forma

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x - \theta_n + \theta_F)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \\ &= \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x) + F(x) - F(x - \theta_n + \theta_F)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \\ &= \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \\ &\quad + \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F(x - \theta_n + \theta_F)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \end{aligned}$$

$= B_{1n} + B_{2n}$, donde

$$B_{1n} = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx,$$

$$B_{2n} = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x) - F(x - \theta_n + \theta_F)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx.$$

Aplicando a b' el teorema del valor medio para funciones de dos variables independientes, se obtiene para B_{1n} la expresión:

$$\begin{aligned} B_{1n} &= \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \\ &\quad - \frac{2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \frac{1}{\sigma_n^{*2}} b'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx \\ &\quad - \frac{2(\sigma_n - \sigma_F)}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \frac{1}{\sigma_n^{*2}} (x - \theta_n^*) b'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx, \end{aligned}$$

donde

$$\theta_n^* = \theta_F + \lambda(\theta_n - \theta_F), \quad \sigma_n^* = \sigma_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F), \quad \lambda = \lambda(x, n), \quad 0 < \lambda < 1$$

Luego,

$$(14) \quad B_{1n} = \frac{2}{\sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] b' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) dx + \varepsilon_{1n}^{(1)} + \varepsilon_{2n}^{(1)} + \varepsilon_{3n}^{(1)},$$

donde

$$\varepsilon_{1n}^{(1)} = \left(\frac{2}{\sigma_n^2} - \frac{2}{\sigma_F^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] b' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) dx,$$

$$\varepsilon_{2n}^{(1)} = -\frac{2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \frac{1}{\sigma_n^{*2}} b'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx$$

$$\varepsilon_{3n}^{(1)} = -\frac{2(\sigma_n - \sigma_F)}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \frac{1}{\sigma_n^{*2}} (x - \theta_n^*) b'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx$$

Por otro lado, escribiendo B_{2n} como

$$B_{2n} = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx - \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x - \theta_n + \theta_F) b' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx$$

y haciendo el cambio de variable $x - \theta_n + \theta_F = t$ en la segunda integral, se tiene

$$B_{2n} = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[b' \left(\frac{t - \theta_n}{\sigma_n} \right) - b' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} \right) \right] dt.$$

Si se aplica el teorema del valor medio a b' en el intervalo con extremos en los puntos

$\frac{t - \theta_n}{\sigma_n}$ y $\frac{t - \theta_F}{\sigma_n}$, se obtiene

$$B_{2n} = \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_n^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) b'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) dt \\
&-2(\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) dt \\
&= \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}\right) dt \\
&- \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) - b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}\right) \right] dt \\
&-2(\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) dt
\end{aligned}$$

O sea,

$$(15) \quad B_{2n} = \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}\right) dt + \varepsilon_{1n}^{(2)} + \varepsilon_{2n}^{(2)},$$

donde

$$\varepsilon_{1n}^{(2)} = - \frac{-2(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) - b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}\right) \right] dt$$

$$\varepsilon_{2n}^{(2)} = -2(\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F(t)b''\left(\frac{t-\theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n}\right) dt$$

Análogamente, haciendo el cambio de variable $\theta_n + \sigma_n t = x$, escribimos A_n como

$$A_n = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n^2(x) - F^2(x - \theta_n + \theta_F)] a'\left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n}\right) dx$$

y luego de algunas operaciones algebraicas, en la forma

$$(16) \quad A_n = A_{1n} + A_{2n} + A_{3n},$$

donde

$$A_{1n} = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x)a' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx,$$

$$A_{2n} = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F^2(x) - F^2(x - \theta_n + \theta_F)]a' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx,$$

$$A_{3n} = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 a' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx.$$

Si se aplica el teorema del valor medio del cálculo diferencial para funciones de dos variables independientes a α' en el integrando de A_{1n} , se obtiene

$$(17) \quad A_{1n} = \frac{2}{\sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x)a' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) dx + \delta_{1n}^{(1)} + \delta_{2n}^{(1)} + \delta_{3n}^{(1)},$$

donde

$$\delta_{1n}^{(1)} = 2 \left(\frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma_F^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x)a' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) dx,$$

$$\delta_{2n}^{(1)} = -\frac{2}{\sigma_n^2} (\theta_n - \theta_F) \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x) \frac{1}{\sigma_n^*} a'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx \quad y$$

$$\delta_{3n}^{(1)} = -\frac{2}{\sigma_n^2} (\sigma_n - \sigma_F) \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]F(x) \frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^{*2}} a'' \left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*} \right) dx$$

Por otro lado, si se compara A_{2n} con B_{2n} , se concluye inmediatamente que

$$A_{2n} = -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_n^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt$$

$$= -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t)a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
& -(\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt \\
& \quad = -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) dt \\
& \quad - \frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) \left[a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) - a'' \frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right] dt \\
& \quad - (\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt
\end{aligned}$$

O sea

$$(18) \quad A_{2n} = -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) dt + \delta_{1n}^{(2)} + \delta_{2n}^{(2)},$$

donde

$$\delta_{1n}^{(2)} = -\frac{(\theta_n - \theta_F)}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) \left[a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) - a'' \frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right] dt$$

$$\delta_{2n}^{(2)} = -(\theta_n - \theta_F) \left[\frac{1}{\sigma_n^3} - \frac{1}{\sigma_F^3} \right] \int_{-\infty}^{\infty} F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_n} - \lambda \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_n} \right) dt$$

Resumiendo, de (12)-(18) sigue que

$$\begin{aligned}
(19) \quad & \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_n) - \frac{\partial}{\partial \sigma} d_F(\theta_F, \sigma_F) = \\
& \frac{2}{\sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \left[F(x) a' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) - b' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) \right] dx \\
& - \frac{\theta_n - \theta_F}{\sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F^2(t) a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) - 2F(t) b'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 a' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \\
& + \varepsilon_{1n}^{(1)} + \varepsilon_{2n}^{(1)} + \varepsilon_{3n}^{(1)} + \varepsilon_{1n}^{(2)} + \varepsilon_{2n}^{(2)} \\
& + \delta_{1n}^{(1)} + \delta_{2n}^{(1)} + \delta_{3n}^{(1)} + \delta_{1n}^{(2)} + \delta_{2n}^{(2)}
\end{aligned}$$

Por la continuidad de $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F$ y por la consistencia fuerte de σ_n , se concluye que el

factor $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F + \lambda(\sigma_n - \sigma_F))$ del segundo miembro de (10), tiende con probabilidad 1

a $\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F)$. Luego si

$$(20) \quad \sqrt{n} \varepsilon_{jn}^{(i)} \xrightarrow{P} 0 \text{ y } \sqrt{n} \delta_{jn}^{(i)} \xrightarrow{P} 0, \quad j=1, 2, 3; \quad i=1, 2$$

y

$$(21) \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 a' \left(\frac{x - \theta_n}{\sigma_n} \right) dx \xrightarrow{P} 0,$$

se tendrá finalmente que:

$$\sqrt{n}(\sigma_n - \sigma_F) =$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} 2[I_{[x_i, \infty)}(x) - F(x)][F(x)a' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right) - b' \left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F} \right)] dx \right. \\
& \left. - \frac{(\theta_n - \theta_F)}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} [F^2(t)a'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) - 2F(t)b'' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right)] dt \right\} + \varepsilon_n,
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon_n \xrightarrow{P} 0$.

El resultado sigue si se toma

$$l^{**}(x) = \frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^2} \int_{-\infty}^{\infty} 2[l_{[x, \infty)}(t) - F(t)][F(t)a'(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}) - b'(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F})] dt$$

$$- [\frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} d_F(\theta_F, \sigma_F) \sigma_F^3} \int_{-\infty}^{\infty} [F^2(t)a''(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F}) - 2F(t)b''(\frac{t-\theta_F}{\sigma_F})] dt]^*(x)$$

Para completar la prueba se necesita demostrar (20) y (21).

Como $\sqrt{n}D_n = \sqrt{n} \sup |F_n(x) - F(x)|$ tiene una distribución límite y $\sigma_n \xrightarrow{P} \sigma_F$ (ya que $\sigma_n \xrightarrow{CPI} \sigma_F$), por aplicación del teorema de Slutsky, se concluye que

$$\sqrt{n}\varepsilon_{ln}^{(1)} \xrightarrow{P} 0.$$

En efecto:

$$\sqrt{n} |\varepsilon_{ln}^{(1)}| \leq 2 \left| \frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma_F^2} \right| \sqrt{n} \sup |F_n(x) - F(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |b'(\frac{x-\theta_F}{\sigma_F})| dx.$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{x-\theta_F}{\sigma_F} = t$, escribimos

$$\sqrt{n} |\varepsilon_{ln}^{(1)}| \leq 2\sigma_F \left| \frac{1}{\sigma_n^2} - \frac{1}{\sigma_F^2} \right| \sqrt{n} \sup |F_n(x) - F(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |b'(t)| dt \xrightarrow{P} 0,$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} |b'(t)| dt < \infty$.

Con idéntico razonamiento y teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} |a'(t)| dt < \infty$, se prueba que

$$\sqrt{n}\delta_{ln}^{(1)} \xrightarrow{P} 0.$$

Los restantes términos presentan una dificultad mayor. Por ejemplo consideremos

$$\sqrt{n}\varepsilon_{2n}^{(1)} = \sqrt{n}(\theta_n - \theta_F) \left(-\frac{2}{\sigma_n^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)] \frac{1}{\sigma_n^{*2}} b''\left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*}\right) dx.$$

Como $\sqrt{n}(\theta_n - \theta_F)$ tiene una distribución límite, $\sup |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{CPI} 0$ y

$\sigma_n^2 \xrightarrow{CPI} \sigma_F^2$, el resultado $\sqrt{n}\varepsilon_{2n}^{(1)} \xrightarrow{P} 0$ sigue si antes probamos que

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n^{*2}} |b''\left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*}\right)| dx \xrightarrow{CPI} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_F^2} |b''\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right)| dx$$

Para probar (22) observemos que $\frac{1}{\sigma_n^{*2}} |b''\left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*}\right)|$ converge puntualmente a

$\frac{1}{\sigma_F^2} |b''\left(\frac{x - \theta_F}{\sigma_F}\right)|$. Por otro lado, por ser ϕ, Φ, w', w'' , funciones acotadas,

existe $K > 0$ tal que $|b''(x)| \leq K\phi(x)[1 + |x| + |x|^2 + |x|^3]$ para todo x real,

de donde sigue que (tomando $a_0 = \frac{1}{\sigma_F}$, $b_0 = -\frac{\theta_F}{\sigma_F}$ en Lema A.1.1 y teniendo en cuenta

que $\sigma_n \xrightarrow{CPI} \sigma_F$)

$$\exists C > 0: \frac{1}{\sigma_n^{*2}} |b''\left(\frac{x - \theta_n^*}{\sigma_n^*}\right)| \leq Ce^{-\frac{1}{4\sigma_F^2}x^2} (1 + |x|^2 + |x|^3)^2,$$

para todo x real y para todo n suficientemente grande. Entonces (22) es consecuencia del

teorema de la convergencia dominada de Lebesgue por ser $\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\frac{1}{4\sigma_F^2}x^2} dx < \infty$.

Se omite la prueba para los términos restantes por considerar que en todos los casos la correspondiente prueba de consistencia se obtiene usando los mismos argumentos empleados en la demostración que precede.

Para completar la prueba es necesario probar que:

$$(23) \quad E(l^{**}(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} l^{**}(x) dF(x) = 0.$$

Puesto que $E(l^*(X)) = 0$ por hipótesis, falta mostrar que

$$(24) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [I_{[x, \infty)}(t) - F(t)] \left[F(t) a' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) + b' \left(\frac{t - \theta_F}{\sigma_F} \right) \right] dt \right\} dF(x) = 0$$

La demostración de (24) sigue directamente del teorema de Fubini.

REFERENCIAS

- APOSTOL T.M. (1972). Análisis Matemático. Reverté S.A.
- BILLINGSLEY P. (1968) Convergence of Probability Measures. Wiley.
- BOOS, D. D. (1981). Minimum distance estimators for location and goodness of fit. JASA, 76, p. 263-270.
- DURBIN, J. (1973a). Distribution theory for tests based on the sample distribution function. SIAM Monography.
- DURBIN J. (1973b) Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated. The Annals of Statistics. Vol. 1.Nº 2 270-290.
- KENDALL M.G. and STUART A. (1967). The Advanced theory of Statistics. Charles Griffin & Co. Limited.
- LEHMANN E. L. (1999). Elements of Large-Sample Theory. Springer
- PETTITT A. N. (1976) Cramér-von Mises statistics for testing normality with censored samples. Biometrika 63, 475-81.
- PETTITT A. N and STEPHENS M. A. (1976). "Modified Cramér -von Mises Statistics for Censored Data". Biometrika, 63,2, pp 291-298.
- RODRIGUEZ, J. C. and VIOLLAZ, A. J. (1995) "A Cramer-von Mises Type Goodness of Fit Test with Asymmetric Weight Function". Commun. in Statistics: Theory and Methods, Vol.24, Issue 4, pp.1095-1120.
- RODRIGUEZ, J. C. and VIOLLAZ, A. J. (1999). "A weighted Cramer-von Mises statistic derived from a decomposition of the Anderson-Darling statistic". Commun. in Statistics: Theory and Methods. Vol. 28, Issue 10. Pag. 2333-2346.
- RUDIN W. (1966). Principios de Análisis Matemático. McGraw-Hill.
- SERFLING R. J. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. John Wiley & Sons.

-SHORACK and WELLNER J.A. (1986) Empirical Processes with Applications to Statistics. John Wiley & Sons.

-VIOLLAZ, A. J. and RODRIGUEZ, J. C.(1996). "A Cramer-von Mises Type Goodness of Fit Test with Asymmetric Weight Function: The Gaussian and Exponential Cases". Commun. in Statistics: Theory and Methods, Vol.25, Issue 1.