## Los sectores público y privado y sus cónicas respectivas

Manuel L. Cordomí

### El modelo

Se trata de un mundo integrado por consumidores que poseen idénticos gustos y preferencias. Todos están dotados de la misma canasta de servicios productivos (trabajo y capital) y enfrentan las mismas posibilidades de producción.

El desarrollo que sigue se circunscribe al caso de dos bienes y a una "curva" de transformación lineal. Dentro de este marco analítico la única fuerza que puede alterar los precios relativos de los (dos) bienes es un cambio en la estructura tributaria.

A continuación se presenta el modelo con el que nos proponemos examinar una economía de este tipo:

(1) $U = U(X_1, X_2)$

(2) $Y^0 = X_1 + X_2$

(3) $Y^0 = X_1 P_1 + X_2 P_2$

(4) $\delta P_1 = U_1 (X_1, X_2)$

(5) $\delta P_2 = U_2 (X_1, X_2)$

(6) $P_1 = C (1 + t_1)$

(7) $P_2 = C (1 + t_2)$

(8) $t_2 = \theta t_1$

(9) $O = C G_1 + C G_2 - C(t_1 X_1 + t_2 X_2)$

Se trata de un sistema de nueve ecuaciones con nueve incógnitas: U, $X_1$, $X_2$, $P_1$, $P_2$, $\delta$, C, $t_1$ y $t_2$. La ecuación (1) es la función de utilidad del consumidor representativo. La ecuación (2) describe las posibilidades de producción que supondremos lineal. La ecuación (3) es el gasto en consumo expresado en moneda constante donde $P_1$ y $P_2$ son los precios corrientes deflactados por un índice de precios del tipo Paasche. Las ecuaciones (4) y (5) son las condiciones marginales de equilibrio siendo $\delta$ el multiplicador Lagrangeano. Las ecuaciones (6) y (7) muestran la relación entre el precio de un bien y su costo de producción (C) cuando se aplica un impuesto ad-valorem al consumo del mismo. La ecuación (8) contempla cualquier tipo de alternativa de impuestos ad-valorem sobre los bienes $X_1$ y $X_2$. Si $\theta = 1$, entonces el impuesto es uniforme; si $\theta = 0$ entonces hay un solo impuesto sobre $X_1$; si $\theta < 0$, entonces el impuesto recae sobre $X_1$ y $X_2$ recibe un subsidio, etc. La ecuación (9) establece la condición de un presupuesto equilibrado, siendo $G_1$ y $G_2$ la canasta de los bienes $X_1$ y $X_2$ que adquirirá el gobierno cualquiera sea la alternativa tributaria que se considere.

Se trata de un sistema de ecuaciones no lineales. En varias de las ecuaciones las variables aparecen multiplicándose entre si: $X_1$ $P_1$, $X_2$ $P_2$, $\delta$ $P_1$, $\delta$ $P_2$ $Ct_1$, $Ct_2$, $Ct_1X_1$, $Ct_2X_2$ ; sin contar la manera en que habrán de interactuar los bienes $X_1$ y $X_2$ en la función de utilidad.

## Un ejemplo numérico

Con fines ilustrativo haremos un ejemplo numérico para una economía en la que no hay distorsiones previas. Supondremos además que $U(X_1, X_2) = -0{,}05\ X_1^2 - 0.10\ X_2^2 + X_1 X_2$; $Y^o = 100$; $G_1 = 6$, y $G_2 = 8$. Bajo estos supuestos nuestro sistema de ecuaciones es el siguiente:

(10) $U = -0.05\ X_1^2 - 0.10\ X_2^2 + X_1 X_2$

(11) $100 = X_1 + X_2$

(12) $100 = X_1 P_1 + X_2 P_2$

(13) $\delta P_1 = -0{,}10\ X_1 + X_2$

(14) $\delta P_2 = X_1 - 0.20\ X_2$

(15) $P_1 = C(1 + t_1)$

(16) $P_2 = C(1 + t_2)$

(17) $t_2 = \theta\ t_1$

(18) $0 = 6\ C + 8\ C - C(t_1\ X_1 + t_2\ X_2)$

Los valores de equilibrio para sistemas de ecuaciones de este tipo suelen encontrarse mediante procedimientos computacionales del tipo Newton-Raphson a partir de valores iniciales suficientemente próximos a la solución verdadera.

## Método recursivo para resolver el sistema

Un examen detenido del sistema de ecuaciones (10) – (18) sugiere que el mismo puede dividirse en dos partes: las ecuaciones (10) a (14) y las ecuaciones (15) a (18). La primera parte está relacionada con las condiciones para el consumo óptimo de un consumidor sujeto a restricciones de producción y gasto. La segunda parte se relaciona con el modo en que los precios son afectados por el sector público a través de políticas tributarias alternativas permaneciendo constante la canasta de bienes que adquirirá el gobierno ($G_1 = 6$ y $G_2 = 8$) y un presupuesto equilibrado .

Comenzaremos con las ecuaciones que integran la primera parte y para simplificar los desarrollos ignoraremos por el momento la ecuación (10):

(19) $100 = X_1 + X_2$

(20) $100 = X_1P_1 + X_2P_2$

(21) $\delta P_1 = -0.10\ X_1 + X_2$

(22) $\delta P_2 = X_1 - 0.20\ X_2$

Este es un sistema de cuatro ecuaciones con cinco incógnitas: $X_1$, $X_2$, $P_1$, $P_2$ y $\delta$. De las ecuaciones (19), (21) y (22) obtenemos las funciones de demanda por $X_1$ y $X_2$:

(23) $X_1 = 100\dfrac{P_2 + 0.2P_1}{1.2P_1 + 1.1P_2}$

(24) $X_2 = 100\dfrac{0.1P_2 + P_1}{1.2P_1 + 1.1P_2}$

Reemplazando en la ecuación (20) las variables $X_1$ y $X_2$ por sus valores expresados por las ecuaciones (23) y (24) obtenemos la siguiente frontera de precios:

(25) $0 = 0.2\ P_1^2 + 0.1\ P_2^2 + 2\ P_1\ P_2 - 1.2\ P_1 - 1.1\ P_2$

El lugar geométrico que satisface las condiciones de la ecuación (25), es una hipérbola una de cuyas ramas posee sentido económico ($P_1 > 0$, $P_2 > 0$), curva FF en el Gráfico.

Como consecuencia de esta transformación tenemos tres ecuaciones: (23), (24) y (25) con cuatro incógnitas: $X_1$, $X_2$, $P_1$ y $P_2$. El examen de las ecuaciones que integran la segunda parte mostrará el modo en que la introducción del sector público traerá consigo las ecuaciones faltante.

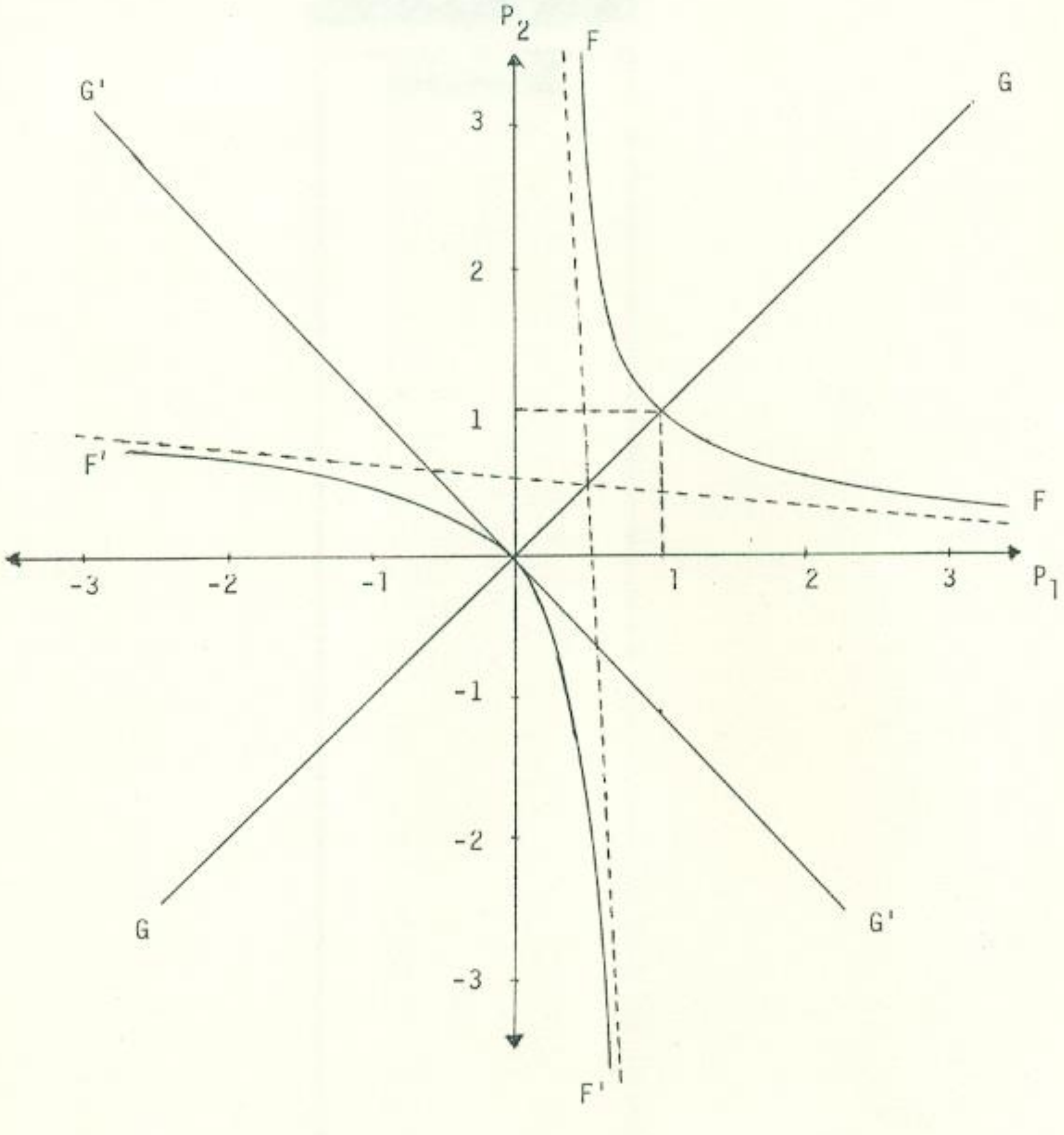
Las ecuaciones (15) a (18) pueden reducirse a las dos siguientes:

(26) $P_2 = \dfrac{1 + \theta t_1}{1 + t_1} P_1$

(27) $t_1 = \dfrac{14}{X_1(1-\theta) + \theta 100}$

Reemplazando $t_1$ en la ecuación (26) por su valor según la ecuación (27) obtenemos una relación entre $P_1$ y $P_2$ para la cual el sector público se encuentra en equilibrio:

(28) $0 = (115{,}4 + 10\ \theta)\ P_2^2 - (63{,}2 - 74{,}6\ \theta)\ P_1\ P_2 - (20 + 116.8\ \theta)\ P_1^2$



P2
F
G'
G
3
2
1
F'
F
-3
-2
-1
1
2
3
P1
-1
-2
G
G'
-3
F'

De este modo obtenemos la ecuación faltante. Con cuatro ecuaciones y con cuatro incógnitas existe un principio de solución. Para mostrar la forma en que la introducción del sector público contribuye a la solución del problema supondremos $\theta = 1$, es decir un sistema de impuestos uniformes al consumo. La ecuación (28) queda reducida en este caso a la siguiente expresión:

$$(29) \quad 0 = 125.4\ P_2^2 + 11.4\ P_1 P_2 - 136{,}8\ P_1^2$$

La ecuación (29) es una ecuación homogénea de segundo grado; un caso especial de funciones cuadráticas. El análisis de esta función revela que la misma representa dos líneas rectas reales y distintas que pasan por origen:

$$(30) \quad P_2 = P_1$$

$$(31) \quad P_2 = -1.0909\ P_1$$

De estas dos rectas la primera tiene sentido económico, recta GG en el Gráfico. Reemplazando en la ecuación (25) a la variable $P_2$ por su valor según la ecuación (30) obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado :

$$(32) \quad 0 = 2.3\ P_1^2 - 2.3\ P_1$$

Esta ecuación tiene dos raíces reales y distintas: $P_1 = 1$ y $P_1 = 0$, de las cuales $P_1 = 1$ satisface la condición $P_1 > 0$.

De esta forma hemos encontrado los valores de $P_1 = P_2 = 1$ que satisfacen una solución con sentido económico al sistema de ecuaciones no lineales (10) – (18) para $\theta = 1$.

Conocidos los valores de $P_1$ y $P_2$ es fácil encontrar los valores de equilibrio de $X_1$ y $X_2$ insertando estos precios de equilibrio en las ecuaciones (23) y (24). El multiplicador Lagrangeano puede obtenerse de la ecuación (21) o de la (22) insertando en ellas los valores de X ya obtenidos. Los mismo ocurre con $t_1$ reemplazando en la ecuación (27) al valor de equilibrio de $X_1$ y haciendo $\theta = 1$. El valor de C se obtiene de la ecuación (15) o, alternativamente, de la ecuación (16). Finalmente, el nivel de utilidad U se obtiene insertando los valores obtenidos para $X_1$ y $X_2$ en la ecuación (10).

Los valores obtenidos mediante este procedimiento recursivo son:

$$\begin{aligned} U &= 2.130{,}0 \\ X_1 &= 52{,}1739 \\ X_2 &= 47{,}8261 \\ P_1 &= 1{,}0000 \\ P_2 &= 1{,}0000 \\ \delta &= 42{,}6087 \\ t_1 &= 0{,}1400 \\ t_2 &= 0{,}1400 \\ C &= 0{,}8772 \end{aligned}$$

En resumen, el sistema de ecuaciones original fue transformado en dos cónicas que se resuelven en una frontera de precios de equilibrio FF y una recta GG que vincula precios alternativos para los cuales el sector público está en equilibrio. Estas ecuaciones pueden expresarse en forma simbólica de la manera siguiente:

(33) $0 = F(P_1, P_2)$

(34) $0 = G(P_1, P_2, \theta)$

Una vez que se encuentran los valores de equilibrio de estas dos variables el resto del sistema se resuelve en forma recursiva. La posibilidad de soluciones múltiples siempre está presente en problemas de este tipo. Argumentos de tipo económico han permitido discernir entre las dos soluciones que en nuestro ejercicio aparecen. De todas maneras estamos en presencia de un caso especial quedando en consecuencia pendiente una demostración bajo condiciones mas generales.

El camino recorrido ha clarificado mucho las intimidades de sistemas de ecuaciones del tipo que nos ocupa y, en consecuencia, torna menos preocupante la posibilidad de estar en frente de una "black box" (1).

(1) "I shall understand by a black box a piece of apparatus, such as four terminal networks with two input and two output terminals, which performs a definite operation on the present and past of input potential, but for which we do not necessarily have any information of the structure by which this operation is perfomed". (Norbert Wiener, CYBERNETICS).

**Agradecimientos**. El análisis de las funciones cuadráticas de este trabajo estuvo a cargo de la Licenciada María R. Rodríguez de Estofan y la preparación del gráfico correspondiente a cargo del Lic. Enrique E. Santillán. El trabajo de mecanografía del manuscrito original estuvo a cargo de Marta del Pino de Oliver.

## Referencias

CORDOMI, M.L., (1990); A concept of demand relevant to the study of taxation problems, Public Finance, 45, 18-36.

CORDOMI, M.L. (1997); A general equilibrium approach to taxation, (xerox). Instituto de Investigaciones Económicas de la UNT, Octubre de 1997.

Universidad Nacional de Tucumán
Instituto de Investigaciones Económicas
junio de 1998.